@svyathor

Математический анализ TXOP

2 семестр, экзамен

Билет №1 стр 224

Ol $\exists$ ф-ия $f(x)$ определена в $\mathring{U}_\delta(c)$ для нек-го $\delta>0$

f имеет в точке c локальный максимум (минимум), если $f(x)\le f(c)$ $\big(f(x)\ge f(c)\big)$ $\forall x\in \mathring{U}_\delta(c)$. Такие точки называются точками лок. экстремума

f имеет в точке c строгий локальный максимум (минимум) если $f(x)<f(c)$ $\big(f(x)>f(c)\big)$ $\forall x\in \mathring{U}_\delta(c)$

Th1 (Ферма; Необходимое условие экстр.)

Если ф-ия $y=f(x)$ дифф-ма в точке c и имеет в этой точке локальный экстр., то $f'(c)=0$.

▶ ф-ия $y=f(x)$ имеет в т. c лок. экстр. $\Rightarrow$ она не может в этой точке ни возрастать ни убывать.

Значит по

> **Th** (достаточное усл. возр. или убыв. ф-ии в точке)
>
> Если ф-ия $y=f(x)$ дифф-ма в точке c и её пр-ая в этой точке $f'(c)$ положительная [отриц.], то ф-ия $y=f(x)$ возр. [убыв] в т. c

производная $f'(c)$ ни положит., ни отриц. $\Rightarrow f'(c)=0$ ■

Th2 (1-е достаточное условие экстр) стр 263

$\exists$ ф-ия f – дифф-ма в $\overset{\circ}{U}_\delta(x)$ и $\exists$ f непр в т. c

1) Если $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ слева от т. c и $f'(x) < 0$ $[f'(x) > 0]$, то ф-ия $f(x)$ имеет в т. c локальный максим [минимум]

2) Если $f'(x)$ имеет один и тот же знак справа и слева от c, то экстр. в точке c нет.

▶ 1) $\exists$ $x_0 \in \overset{\circ}{U}_\delta(x)$

Т.к. f – дифф-ма в $\overset{\circ}{U}_\delta(x)$, то на $[x_0, c]$ по

Th (Лагранжа)

Если ф-ия $f(x)$ непр-на на $[a, b]$ и дифф-ма на (a, b), то $\exists \xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f(c) - f(x_0) > 0$ $[<0]$, т.к. при $c < x_0$ $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$

$c > x_0$ $f'(x) < 0$ $[f'(x) > 0]$

$> f'(x)(c - x_0)$

■

Следствие При переходе через данную точку c $f'(x)$ меняет знак с ‚+' на ‚–' [с ‚–' на ‚+'], то $f(x)$ имеет лок max [min]. Если знак не меняет, то extr $\nexists$.

Th3 (2-е достаточное условие экстремума)

] ф-ия $f(x)$ дифф-ма в $U_\delta(c)$ и $\exists\ f''(c),\ f'(c)=0$

Если $f''(c)<0$ $[f''(c)>0]$, то c – лок max[min]

▶ $f''(c)<0$ $[>0]$, то по

Th (достаточное условие возрастания[убыв] ф-ии в т.)   Если ф-ия $y=f(x)$ – дифф-ма в т. c и её производная в этой точке $f'(c)>0$ $[<0]$, то ф-ия $y=f(x)$ возр[убыв] в т. c

то $f\ \uparrow\ [\downarrow]$ в т. c. Т.к. $f'(x)=0 \Rightarrow \exists\ U_\delta(c)$

в которой $f'(x)>[<]$ слева и $f'(x)>[<]$ справа

по Th2 имеет в т. c max[min] ■

Билет2

2 билет +

Th (3-е достаточное усл-е экстр)

] f n дифф-ма в $U_\delta(c)$, $n\in\mathbb{N}$, n-нечетное;

и] $\exists\ f^{(n+1)}(c)$. Если $f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0$,

$f^{(n+1)}(c)>0$ $[<0]$, то c-точка строго max[min].

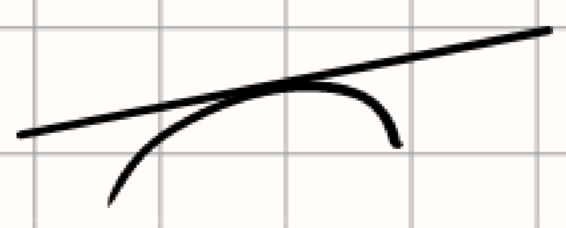
▶ Д-во: Пусть, например, $f^{(n+1)}(c)>0$. Тогда $f^{(n)}\uparrow$ в точке c; $f^{(n)}(c)=0 \Rightarrow \exists\,\delta>0:\ f^{(n)}(x)<0\ \forall x\in(c-\delta;c)$, $f^{(n)}(x)>0\ \forall x\in(c;c+\delta)$

Пусть $x\in\mathring{B}_\delta(c) \Rightarrow f'(x)=\underbrace{f'(c)+\frac{f''(c)}{1!}(x-c)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}}_{=0}+$

$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\underbrace{(x-c)^{n-1}}_{>0,\ \text{т.к. } n-1\text{-чётное}}$ ξ-между c и x. ■

Билет 3 стр 271

Оп График ф-ии $f(x)$ имеет на (a,b) направление **выпуклости вверх [вниз]**, если график касательной к $\forall$ точке графика ф-ии $f(x)$ на (a,b), лежит не ниже [выше] графика ф-ии



Тh 1 (достаточное условие выпуклости)

$\exists$ ф-ия $f(x)$ дважды дифф-ма на (a,b). Если $f''(x) \geq 0 [\leq 0]$ $\forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ выпукла вниз [вверх] на (a,b).

▶ (вверх) на

Д-во: Пусть $c \in (a,b)$. Ур-е касат-й в т. c:

$y = f'(c) \cdot (x-c) + f(c)$. С др. стороны,

$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$, ξ - между x и c

$\Rightarrow y - f(x) = -\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$, $(x-c)^2 \geq 0$

Если, например, $f''(x) \underset{<0}{\geq 0}$ на (a,b), то $y \underset{\geq}{\leq} f(x) \Rightarrow \underset{\cap}{\cup}$ ч.т.д. ■

Оп График ф-ии $f(x)$ имеет в точке $x=c$ **точку перегиба**, если график ф-ии имеет разные направления выпуклости слева и справа от $x=c$.

Тh 2 (Необходимое условие перегиба)

$\exists$ $f(x)$ дифф-ма на (a,b), $c \in (a,b)$, и пусть $\exists f''(c)$. Если c - точка перегиба, то $f''(c) = 0$.

▶ **Д-во**: Заметим, что $\tau'(x) = f'(x) - f'(c) \Rightarrow \tau'(c) = 0$;

$\tau''(x) = f''(x) \Rightarrow \tau''(c) = f''(c)$.

Предположим, что $f''(c) > 0$ (<0). Тогда $\tau''(c) > 0$ (<0),

$\tau'(c) = 0 \Rightarrow c$ - точка строгого лок. минимума (макс.)

ф-ции $\tau(x)$. Но $\tau(x)$ монотонна в точке c ?!

$\Rightarrow f''(c) = 0$. ч.т.д. ■

Билет 4

Оп График ф-ии $f(x)$ имеет в точке $x=c$ **точку перегиба**, если график ф-ии имеет разные направления выпуклости слева и справа от $x=c$.

Th1 (1-е достаточное условие перегиба)

Пусть ф-ия $f(x)$ дважды дифф-ма в $\mathring{U}_\delta(c)$ и $\exists f'(c)$.

Если $\exists \delta>0$, т.ч. f'' имеет разные знаки слева и справа от c — т. перегиба

▶ **Д-во:** f'' имеет разные знаки $\Rightarrow$ f имеет различные напр-я выпуклости на $(c-\delta; c)$ и $(c; c+\delta)$ $\Rightarrow$ c — т. перегиба. ч.т.д. ◀

Th2 (2-е достаточное условие перегиба)

Пусть ф-ия $f(x)$ дважды дифф-ма в $U_\delta(c)$ и $\exists f'''(c)$

Если $f''(c)=0$, $f'''(c)\neq 0$, то c — т. перегиба

▶ **Д-во:** Если $f'''(c)\neq 0$, то f'' строго монотонна в точке c. Поскольку $f''(c)=0$, то $\exists \delta>0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)$ $\Rightarrow$ c — т. перегиба (т. 2). ч.т.д. ◀

Th3 (3-е достаточное условие перегиба)

Пусть ф-ия $f(x)$ n раз дифф-ма в $U_\delta(c)$, n четное

$\exists f^{(n+1)}(c)$, если $f''(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0$, $f^{(n+1)}(c)\neq 0$, то c — точка перегиба.

Д-во: при $n=2$ уже док-но в т.3. Пусть $n \geq 4$.

Заметим, что $f^{(n)}(c)=0$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta>0$, т.ч. $f^{(n)}(x)$ имеет разные знаки на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)$.

Пусть $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(c)$. Тогда

$$f''(x) = \overbrace{f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3}}^{=0} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}\underbrace{(x-c)^{n-2}}_{\geq 0}, \quad \xi \text{ - между } c \text{ и } x.$$

т.к. $n-2$ – чётное

Значит, f'' имеет разные знаки на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)$

$\Rightarrow c$ – т. перегиба (т.2). ч.т.д. ■

Билет 5

Оп Говорят, что график ф-ии $f(x)$ имеет **вертикальную асимптоту** $x=a$, если $f(a+0)$ и/или $f(a-0)$ равен $\pm\infty$

напр $f(x)=\ln x$, $x=0$ – верт. асим

Оп График ф-ии $f(x)$ имеет **наклонную асимптоту** $y=kx+b$ при $x \to +\infty\ (-\infty)$, если $f(x)-(kx+b)=\alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$, при $x \to +\infty\ (-\infty)$. В частности, при $k=0$ прямую $y=b$ наз. **горизонтальной асимптотой**

напр $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $\quad y=\pm\frac{\pi}{2}$ – гор асимп при $x \to \pm\infty$

$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x}$ $\quad y=x+1$ – накл асимп.

Th (о наклонных асимптотах)

$y = kx+b$ – наклонная асимптота графика ф-ии f при $x \to \pm\infty \iff \exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = b$

▶ Д-во! ($\Rightarrow$) $f(x) = kx+b+\alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$, $x \to \pm\infty$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = k + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} k$; $f(x)-kx = b+\alpha(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} b$.

($\Leftarrow$) Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = b$, то $f(x)-(kx+b) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$

$\Rightarrow f(x)-(kx+b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. ч.т.д. ■

Общая схема исследования ф-ии

1) Область определения
2) Точки разрыва, промежутки непрерывности
3) Нули, промежутки знакопостоянства. $f(0)$
4) Чётность, периодичность, другая симметрия
5) Монотонность, экстремумы
6) Выпуклость, точки перегиба
7) Асимптоты
8) Поведение в граничных точках обл-ти опр-я.

Пример: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$

1) $X=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2) Непр на $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, $x=1$ – т. разрыва 2-го рода

3) f $\;-\;\underset{-1}{\oplus}\;-\;\underset{1}{\circ}\;+\;\to x$ Пересечение с Ox и Oy: $(-1;0)$ и $(0;-1)$

4) –

5) $f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

f': $+\;\underset{-1}{\bullet}\;-\;\underset{1}{\circ}\;-\;\underset{3}{\bullet}\;+\;\to x$

f: $\nearrow\; -1 \;\searrow\; 1 \;\searrow\; 3 \;\nearrow$

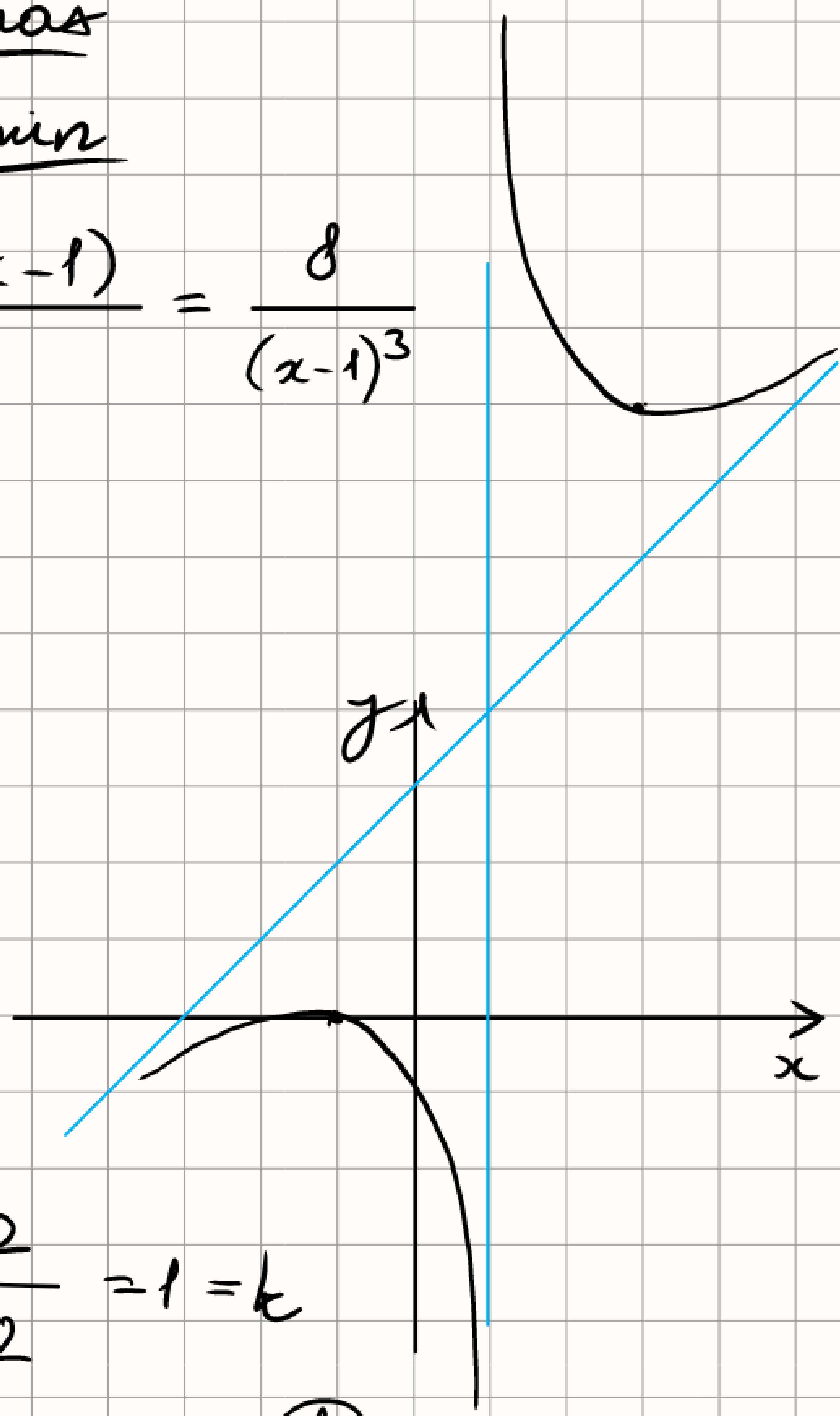
$(-1;0)$ т. max

$(3;8)$ т. min

6) $f''=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\,2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{8}{(x-1)^3}$

f'': $-\;\underset{1}{\circ}\;+\;\to$

f: $\frown\;\;\smile$



7) $x=1$ – верт. асимп.

$\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{(x+1)^2}{x-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}\overset{Л}{=}\dfrac{2(x+1)}{2x-1}\overset{Л}{=}\dfrac{2}{2}=1=k$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)}-x\right)=\dfrac{\cancel{x^2}+2x+1-\cancel{x^2}+x}{x-1}=\dfrac{3x+1}{x-1}\overset{Л}{=}3=b$

$y=x+3$ – асимптота при $x\to\pm\infty$

Билет 6

Опр **Разбиением (неразмеченным)** отрезка $[a, b]$ наз-ся мн-во $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

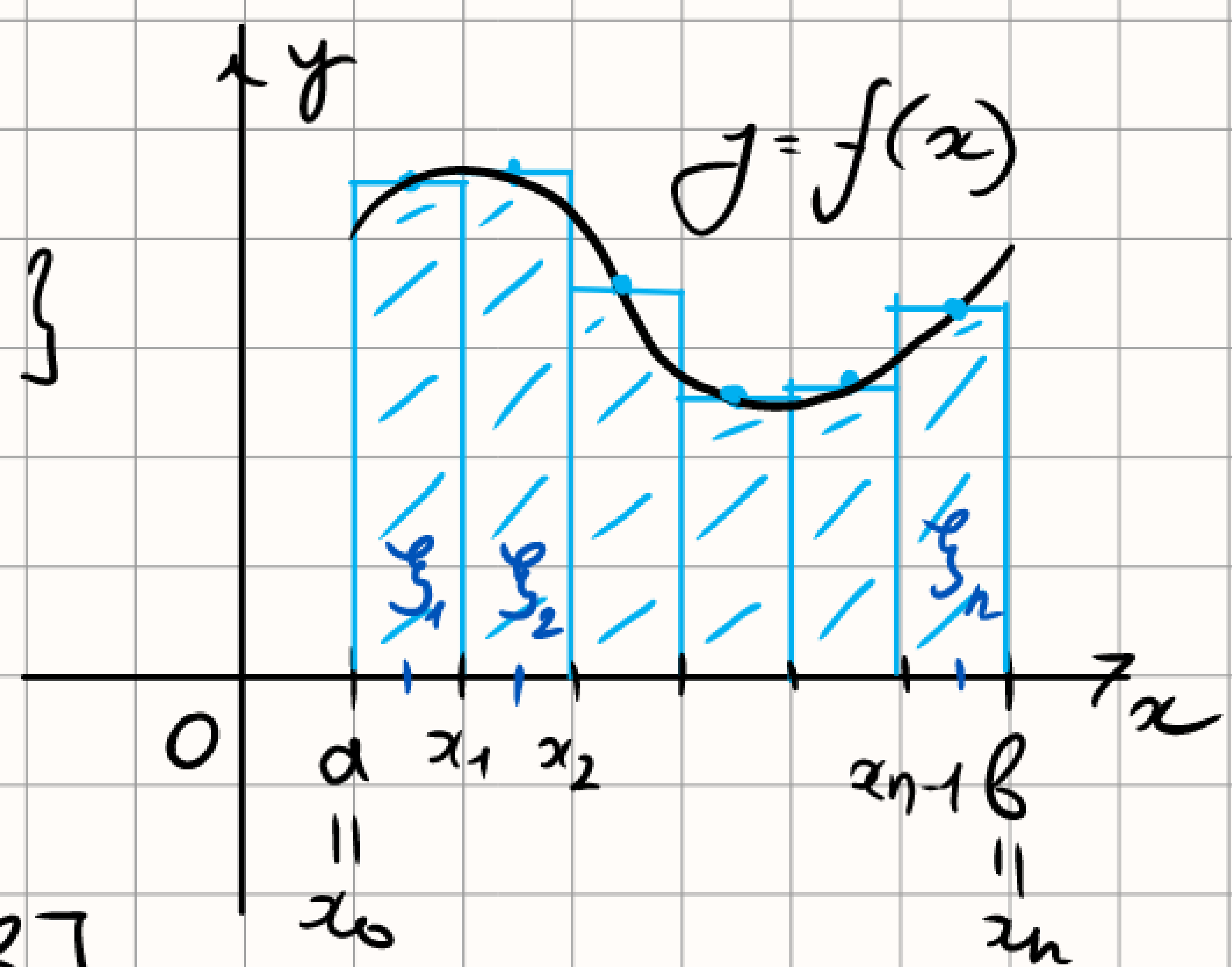
Объединением разбиений T_1 и T_2 наз-ся разбиение T, т.ч. $T = T_1 \cup T_2$. Разбиение T' наз-ся **измельчением разбиения T**, если $T \subset T'$.

Опр Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$

Число $\max\{\Delta x_k\} = \Delta_T$ наз-ся **диаметром разбиения T**

Опр Пусть $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$

Совокупность $V = \{x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$ наз-ся **размеченным разбиением**, соотв-им неразмеченному раз-ию T



Опр Пусть ф-ия f опр-на на $[a, b]$

Выражение $\sigma(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ наз-ся **интегральной суммой** ф-ии f, соотв. размеченному разб-ию V.

Опр **Число I** наз-ся **определенным интегралом (Римана)** от ф-ии f на отрезке $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $\Delta_V < \delta$: $|\sigma_f(V) - I| < \varepsilon$

(т.е. I предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к 0)

Если такое число I $\exists$, то говорят, что f-интегрируема (по Риману) на $[a,b]$. Пишут $f \in R[a,b]$

Обозначение $I = \int_a^b f(x)\,dx$

верхний / нижний предел интегрирования

Опр Верхней [нижней] суммой Дарбу ф-ии f на $[a,b]$ соотв-й разбиению T, наз-ся

$$S(T) = \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k \quad \left(s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \right)$$

где $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$

Th1 (необходимое усл-ие интегрируемости)

Пусть $f \in R[a,b]$. Тогда f-ограничена на $[a,b]$

то f ограничена на $[a,b]$.

Д-во: Предположим, что f не огранич. на $[a,b]$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – разб-е $[a,b]$. Тогда $\exists [x_{q-1}, x_q]$ – отрезок, на к-ром f не ограничена. Выберем произвольные $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, $k \ne q$.

Обозначим $A = \left| \sum\limits_{k=1, k\ne q}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \right|$.

Возьмем любое $M > 0$. f не ограничена на $[x_{q-1}, x_q]$ $\Rightarrow \exists \xi_q \in [x_{q-1}, x_q]$, т.ч. $|f(\xi_q)| > \dfrac{M+A}{\Delta x_q}$.

Получим $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$ – размеч. разбиение, причем

$$|\sigma(V)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k\right| = \left|\sum_{k=1, k\ne q}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + f(\xi_q) \cdot \Delta x_q\right| \ge$$

$$\ge |f(\xi_q) \cdot \Delta x_q| - A > \frac{M+A}{\cancel{\Delta x_q}} \cdot \cancel{\Delta x_q} - A = M.$$

$|a+b| \ge |b| - |a|$

То есть $\forall M > 0$ $\forall \delta > 0$ $\exists V$, $\Delta_V < \delta$: $|\sigma(V)| > M$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$. ч.т.д.

Лемма 1 $\forall V$ размеченного разб-ия: $s(T) \le \sigma(V) \le S(T)$,

где $T = T(V)$, $\quad \sigma(V) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

▶ $s(T) \le \sigma(V) \le S(T)$

Д-во: $m_k \le f(\xi_k) \le M_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ ч.т.д. ■

Лемма 2 $S(T) = \sup\{\sigma(V)\}$; $s(T) = \inf\{\sigma(V)\}$

▶ разб-ям V, соотв-м разб-ю T

Д-во: проведем для $S(T)$. Из п.1 $\Rightarrow \sigma(V) \le S(T)$ $\forall V = V(T)$.

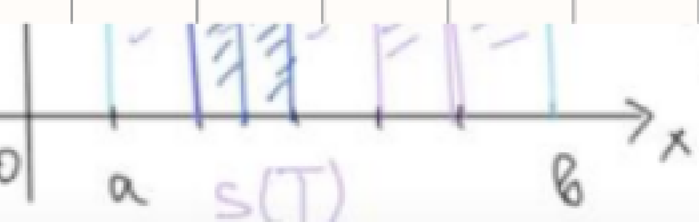
$M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$: $f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Тогда $V = \{T; \xi_1, \dots, \xi_n\} \Rightarrow \sigma(V) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k > \sum_{k=1}^{n}\left(M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_k = S(T) - \frac{\varepsilon}{b-a}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k}_{=b-a} = S(T) - \varepsilon$. ч.т.д. ■

Лемма 3 Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — разбиение $[a,b]$, T' — измельчение T, содержащее l новых точек

Тогда $0 \le S(T) - S(T') \le l(M-m)\Delta_T$

$0 \le s(T') - s(T) \le l(M-m)\Delta_T$

▶ 

Д-во: док-м 1-е утв-е. Пусть $T' = T \cup \{x'\}$, $x_{k-1} < x' < x_k$

Тогда $S(T) - S(T') = M_k \Delta x_k - \Big(\underbrace{\sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x)}_{=M_k' \,\le M_k}(x' - x_{k-1}) + \underbrace{\sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x)}_{=M_k''\,\le M_k}\cdot(x_k - x')\Big) \ge M_k\cdot\Delta x_k - M_k\underbrace{(x' - x_{k-1} + x_k - x')}_{\Delta x_k} = 0$

на всех отрезках, кроме k-го, все взаимно уничтож-ся

др. стороны, $S(T) - S(T') = \underbrace{M_k}_{\le M}\Delta x_k - (\underbrace{M_k'}_{\ge m}(x' - x_{k-1}) + \underbrace{M_k''}_{\ge m}(x_k - x')) \le M\cdot\Delta x_k - m\cdot\Delta x_k \le$

$\le (M-m)\cdot\Delta_T$. ч.т.д.

$\Rightarrow$ при добавл-и l точек: $(M-m)\Delta_T\cdot l$ ■

Лемма 4 $\forall$ разбиений T_1, T_2 отрезка $[a,b]$

$s(T_1) \le S(T_2)$

▶ Д-во: Обозначим $T = T_1 \cup T_2$. Тогда T — измельч-е для T_1 и T_2 $\Rightarrow s(T_1) \underset{\text{л.3}}{\le} s(T) \underset{\text{опр-е}}{\le} S(T) \underset{\text{л.3}}{\le} S(T_2)$. ч.т.д. ■

Билет 7

Опр ==верхним [нижним] интегралом Дарбу== для ф-ии f на $[a, b]$ наз-ся $I^* = \inf\{S(T)\}$ $[I_* = \sup\{s(T)\}]$, где точные грани берутся по всем разб-ям T отрезка $[a, b]$

Лемма 5 Если ф-ия огр-на на $[a, b]$, то I^* и I_* $\exists$, причем $I_* \le I^*$

причем $I_* \le I^*$

$\triangleright$ Д-во: $S(T) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{M_k}_{=\sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)} \Delta x_k \geq m \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = m(b-a) \Rightarrow$

$\forall\, m_k \geq m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$

мн-во $\{S(T)\}$ огр. снизу $\Rightarrow \exists \inf\{S(T)\} = I^*$

Сущ-е I_* – аналогично.

Док-м, что $I_* \le I^*$. Предположим, что $I_* > I^*$.

Обозначим $\varepsilon = \frac{I_* - I^*}{2} > 0$. $I^* = \inf\{S(T)\} \Rightarrow$

$\exists T_1$ – разб-е $[a, b]$, т.ч. $0 \le S(T_1) - I^* < \varepsilon$

$\Rightarrow S(T_1) < I^* + \varepsilon = I^* + \frac{I_* - I^*}{2} = \frac{I_* + I^*}{2}$.

Аналогично $\exists T_2$: $s(T_2) > I_* - \varepsilon = \frac{I_* + I^*}{2}$.

Значит, $s(T_2) > S(T_1)$?! лемме 4. Значит, $I_* \le I^*$. $\blacksquare$

Лемма 6 (основная лемма Дарбу)

$I^* = \lim\limits_{\Delta T \to 0} S(T)$; $I_* = \lim\limits_{\Delta T \to 0} s(T)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T$ - раз-ие $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$: $|I^* - S(T)| < \varepsilon$; $|I_* - s(T)| < \varepsilon$

$\triangleright$ Д-во: Заметим, что если $m = M$, то f постоянна на $[a, b] \Rightarrow \forall T$: $S(T) = s(T) = M \cdot (b-a) = I^* = I_*$.

Пусть $m < M$. Док-м первое утв-е, второе аналогично.

Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T^* = \{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ – разбиение, $x_0^* = a$, $x_k^* = b$,

т.ч. $0 \le S(T^*) - I^* < \varepsilon/2$. $\Rightarrow S(T^*) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$ – по опр-ю inf

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)(k-1)}$ (заметим, что $\delta = \delta(\varepsilon)$).

Пусть T – произвольное разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$.

Обозначим $T' = T \cup T^*$. T' – измельчение для T

$\Rightarrow$ (лемма 3) $0 \le S(T) - S(T') \le (M-m) \cdot \Delta_T \cdot (k-1) <$

$< (M-m) \cdot \delta \cdot (k-1) = \varepsilon/2$. Следовательно, $S(T^*) - I^* < \varepsilon/2$

$0 \le S(T) - I^* = \underbrace{S(T) - S(T')}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{S(T')}_{\le S(T^*)} - I^* < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ч.т.д. $\blacksquare$

Th1 (критерий Римана инт-ти ф-ии)

] f - ограничена на $[a,b]$. $f \in R[a,b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ T$ - разбиение $[a,b]$ т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$

▶ $0 \le S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Д-во: ($\Rightarrow$) Пусть $f \in R[a,b]$. $\exists I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists \delta(\varepsilon)$, т.ч. $\forall V$, $\Delta_V < \delta$: $|\sigma(V) - I| < \varepsilon/3$. Т.к. $S(T) = \sup\{\sigma(V)\}$, $s(T) = \inf\{\sigma(V)\}$ (л.2), то из нер-ва $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(V) < I + \frac{\varepsilon}{3}$ следует: $I - \frac{\varepsilon}{3} \le S(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$, $I - \frac{\varepsilon}{3} \le s(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow 0 \le S(T) - s(T) \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Заметим, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T$-разб-е : $0 \underset{\text{л.5}}{\le} I^* - I_* \le S(T) - s(T) < \varepsilon$ по усл-ю ($I^* \le S(T)$, $I_* \ge s(T)$), но I^* и I_* не зависят от $\varepsilon \Rightarrow I^* = I_*$.

Из л.6 $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S(T) = I^* = I_* = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} s(T)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$, т.ч. $\forall T$, $\Delta_T < \delta$: $0 \le S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Тогда $\forall V$ - размеч. разб-я, $\Delta_V < \delta$: $\underbrace{s(T) \le \sigma(V) \le S(T)}_{\text{лемма 1}}$, $s(T) \le I \le S(T)$, где $I := I^* = I_*$, значит, $|I - \sigma(V)| \le S(T) - s(T) < \varepsilon \Rightarrow f \in R[a,b]$. ч.т.д. ■

Следствие Из Th1 следует критерий:

] f - огр-на на $[a,b]$. $f \in R[a,b] \Leftrightarrow I^* = I_*$

Билет 8

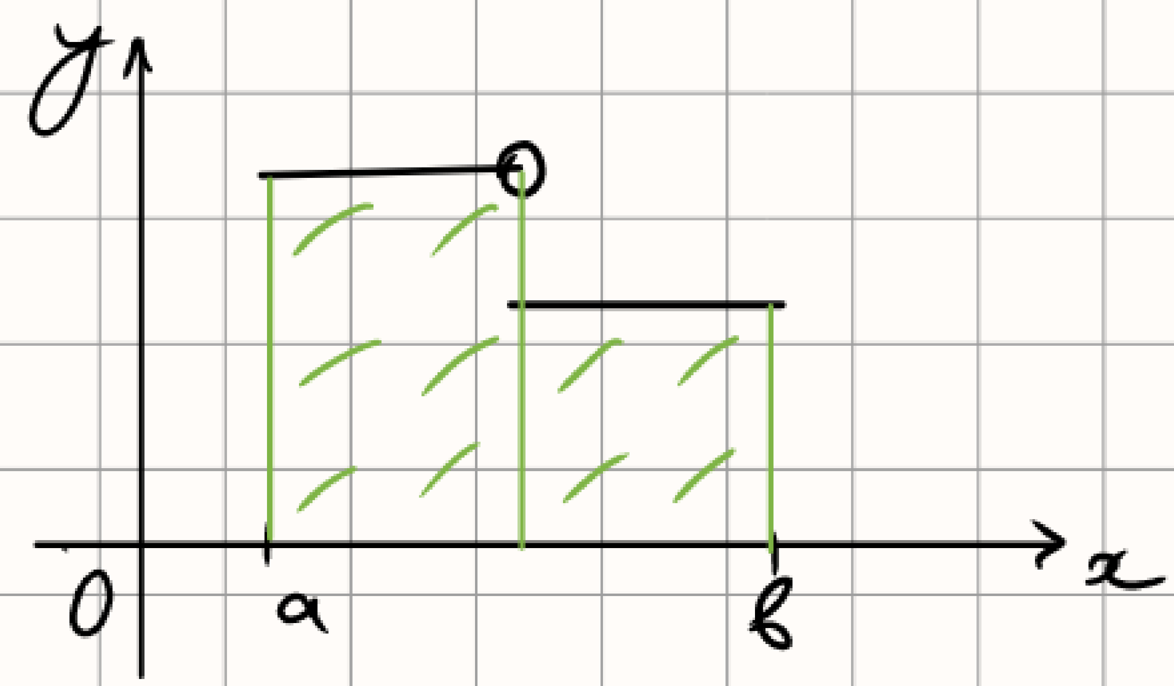
Т1 (интегрируемость непр. ф-ии)

Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x', x'' \in [a,b]$ $|x'-x''|<\delta$ $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — разб-е $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$. Тогда $\forall [x_{k-1}, x_k]$: $M_k - m_k = \underset{\in [x_{k-1}, x_k]}{\overset{M_k}{f(x_k')}} - \overset{m_k}{f(x_k'')} < \frac{\varepsilon}{b-a}$, т.к. $|x_k' - x_k''| < \Delta x_k < \delta$. Значит,

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon \Rightarrow f \in R[a,b] \text{ (Т1)}$$ ■

О1 Выражение $\omega_k = M_k - m_k$ наз-ся **колебанием** ф-ии f на $[x_{k-1}, x_k]$



Т2 (дост-ое усл-ие интегр-ти ф-ии, имеющей разрывы)

Пусть f — огранич. на $[a,b]$. Если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечная система интервалов, покрывающая все точки разрыва f на $[a,b]$, причем сумма их длин $< \varepsilon$, то $f \in R[a,b]$

▶ J_1, J_2, ..., J_r; a, I_1, I_2, ..., I_l, b

Д-во: Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $\{I_j\}_{j=1}^{l}$ покрывает все точки разрыва, $\sum_{j=1}^{l} |I_j| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(M-m)}}_{>0}$ (если $M = m$, то f — постоянна $\Rightarrow$ интегр-ма). Тогда $[a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{l} I_j = \bigcup_{j=1}^{r} J_j$, где J_j — отрезки; $r \le l+1$. На каждом из отрезков J_j ф-ция f непр-на $\Rightarrow$ Р/Н $\Rightarrow \exists \delta_j(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x', x'' \in J_j$, $|x'-x''| < \delta_j$: $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Положим $\delta = \min\limits_{1 \le j \le r} \{\delta_j\}$ и разобьем каждый из отрезков J_j разб-ем T_j, $\Delta_{T_j} < \delta$.

Пусть $T = \bigcup_{j=1}^{r} T_j \cup \{a,b\}$ — разб-е $[a,b]$. Тогда ($\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$)

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \underset{\text{по тем отрезкам разб-я, к-рые вошли в } \cup J_j}{\sum\nolimits_1} \overset{< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}}{\omega_k} \Delta x_k + \underset{\text{остальные}}{\sum\nolimits_2} \overset{\le M-m}{\omega_k} \Delta x_k <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k + (M-m) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{l} |I_j|}_{< \frac{\varepsilon}{2(M-m)}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ ■

$\Rightarrow f \in R[a,b]$ (Т.1) ч.т.д.

Следствие Если f – огр на $[a,b]$ и имеет на этом отр. конечное число точек разрыва, то $f \in R[a,b]$

Th3 (интегр-ть монотонной ф-ции)

] f огр-на и монотонна на $[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$

► **Д-во:** проведём для случая, когда $f \uparrow$.
Если $m = M$, то $f = const \Rightarrow$ инт-ма.
Пусть $m < M$. Из монот-ти $\Rightarrow m = f(a)$, $M = f(b)$.
Возьмем $\varepsilon > 0$; обозначим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогда

$$\forall T,\ \Delta_T < \delta:\ S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{<\delta} < \delta \underbrace{\left(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})\right)}_{= f(b) - f(a)} = \varepsilon.$$

ч.т.д. ■

Билет 9

Св-ва опр-ного интеграла

Линейность

1) Если $f \in R[a,b]$, $k \in \mathbb{R}$, то $(k \cdot f) \in R[a,b]$ и

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

▶ т.к. $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot f(\xi_k)\Delta x_k = k \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ ■

2) Если $f, g \in R[a,b]$, то $(f+g) \in R[a,b]$ и

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

▶ Аналогично 1) ■

Интегрируемость пр-я

3) Если $f, g \in R[a,b]$, то $(f \cdot g) \in R[a,b]$

▶ Пусть $f \in R[a,b] \Rightarrow g(f) = f^2 \in R[a,b]$

(т.к. ф-ия $g(y) = y^2 \in Lip\,[m,M]$)

$\Rightarrow \quad f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right) \in R[a,b]$ ■

Интегр-ть на подотрезках

4) Если $f \in R[a,b]$, $a \le c < d \le b$, то $f \in R[c,d]$

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – разб-ие $[a,b]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$

Обозначим $T' = T \cup \{c,d\}$. Пусть $x_{\ell-1} \le \underbrace{c < x_\ell < \dots < x_m < d}_{T'' \text{ – разбиение } [c,d]} < x_{m+1}$

Тогда $\underset{\sum_{k=\ell}^{m+1} \omega_k \Delta x_k}{S(T'') - s(T'')} \le \underset{\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k}{S(T') - s(T')} \le S(T) - s(T) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f \in R[c,d]$ ■

Аддитивность

5) Если $f \in R[a,c]$ и $f \in R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$, причём

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

▶ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_1$ – разб-ие $[a,c]$ $\quad S(T_1) - s(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists T_2$ – разб-ие $[c,b]$ $\quad S(T_2) - s(T_2) < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $T = T_1 \cup T_2$ – разбиение $[a,b]$ $\quad S(T) - s(T) < \varepsilon \Rightarrow f \in R[a,b]$

Далее] T – разб-ие $[a,b]$, т.ч. $c \in T$ $(c = x_m)$

Тогда
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}_{\downarrow\ \Delta_T \to 0 \quad \int_a^b f(x)\,dx} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k}_{\downarrow \quad \int_a^c f(x)\,dx} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}_{\downarrow \quad \int_c^b f(x)\,dx} \quad ■$$

Св-ва интеграла связанные с нер-вами

1)] $f \in R[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ $[\leq 0]$ $\quad \forall x \in [a,b]$

Тогда $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ $[\leq 0]$

▶ Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\forall T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ – разб-ие $[a,b]$: $m_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n \Rightarrow s(T) \geq 0$. Поскольку $s(T) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(T)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ ■

2) $f, g \in R[a,b]$ $\quad f(x) \geq g(x)$ $\quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

▶ $f(x) - g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \underbrace{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}_{\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx} \geq 0$ ■

3) Пусть $f \in R[a,b]$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Если $f \in$ непр в т x_0 такое, что $f(x_0) > 0$, то $\int_a^b f(x) > 0$

▶ Пусть $f(x_0) = \alpha > 0$. $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \exists \delta > 0$ т.ч. $\underbrace{|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon}_{\Downarrow}$ $\forall x \in \underbrace{U_\delta(x_0) \cap [a,b]}_{J}$,

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon = \frac{\alpha}{2}$$

Положим $g(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & x \in J \\ 0 & x \in [a,b] \setminus J \end{cases}$

Тогда $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \geq \frac{\alpha}{2}\delta > 0$ ■

4) Если $f \in C[a,b]$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ и $\int_a^b f(x)dx = 0$ то $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$

▶ Пусть $f(x_0) > 0$ для нек-го $x_0 \in [a,b]$. Поскольку f непр на $[a,b]$, то она непр-на в точке $x_0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$?! $\Rightarrow$ $f \equiv 0$ ■

5) Если $f \in R[a,b]$, то $|f| \in R[a,b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

▶ р-им $f \in R[a,b]$, $g(y) = |y| \in Lip[m,M] \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{g(f)}_{|f|} \in R[a,b]$. Далее

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq A = \int_a^b |f(x)|dx$$ ■

Билет 10

№1 (I теорема о среднем)   стр 353

] $f, g \in R[a,b]$; $g(x) \geq 0$ [≤ 0] $\forall x \in [a,b]$

Тогда $\exists\ \mu \in [\inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x);\ \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx \qquad (1)$$

Если $f \in C[a,b]$, то $\exists\ \xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx \qquad (2)$$

▶ Д-во: Пусть сначала $g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$.

Поскольку $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$, то

$$m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b m g(x)\,dx}_{= m\int_a^b g(x)\,dx} \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b M g(x)\,dx}_{= M\cdot\int_a^b g(x)\,dx} \quad (*)$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то левая и правая части $(*) = 0 \Rightarrow$ средняя $= 0$

Тогда ф-ла (1) верна $\forall \mu$.

Пусть $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Разделим на него нер-во $(*)$: $m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{=:\mu} \leq M$

Если $g(x) \leq 0\ \forall x \in [a,b]$, то умножим обе части (1) на минус единицу и применим доказанное выше к ф-ции $\tilde{g}(x) = -g(x)$.

Если $f \in C[a,b]$, то $\exists\ \xi \in [a,b]$, т.ч. $f(\xi) = \mu$ (прох-е непр. ф-ции через промежут. знач-я) $\Rightarrow$ получаем соотн-е (2).

ч.т.д. ◼

Следствие Если $f \in R[a,b]$, то $\exists\ \mu \in [\inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x);\ \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

$f \in C[a,b]$, то $\exists\ \xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Th2 (2-я теорема о среднем)

Пусть $f, g \in R[a,b]$

1) Если $g(x) \geq 0$ и не возр-ет [убыв] на $[a,b]$, то $\exists\, \xi \in [a,b]$ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$ $\left[g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx\right]$

2) Если g – монотонна на $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$$

Билет 11

Опр Пусть $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Ф-ия $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ наз. *интегралом с переменным верхним пределом*

Св-ва интеграла с пере-ым верх. пределом стр 358

Th1 Если ф-ия $f(x) \in R[a,b]$, то $F(x) \in C[a,b]$

Кроме того если $f(x)$ – непр-на в т. $\xi \in [a,b]$, то F – дифф-ма в т. ξ и $F'(\xi) = f(\xi)$.

▶

Д-во: Пусть $c \in [a,b]$ – произвольная, $\Delta x \in \mathbb{R}$, т.ч. $c + \Delta x \in [a,b]$. Тогда $|F(c+\Delta x) - F(c)| = \left|\int_{x_0}^{c+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt\right| = \left|\cancel{\int_{x_0}^{c} f(t)\,dt} + \int_{c}^{c+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{c} f(t)\,dt}\right| = \left|\int_{c}^{c+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leq$

$\leq \left|\int_{c}^{c+\Delta x} \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\,dt\right| \leq \underbrace{\sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|}_{= M} \cdot |\Delta x| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0 \Rightarrow F$ непр-на в точке c.

$$\left|\int_c^{c+\Delta x} \underbrace{|f(t)|}_{\le M\ \forall t\in[a,b]} dt\right| \le \left|\int_c^{c+\Delta x} M\cdot dt\right| = M\left|\int_c^{c+\Delta x} 1\,dt\right| = M\cdot|\Delta x|$$

Пусть теперь f непрерывна в точке $\xi\in[a,b]$. Возьмем $\Delta x\in\mathbb{R}$, т.ч. $\xi+\Delta x\in[a,b]$. Тогда

$$\left|\underbrace{\frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x}}_{\xrightarrow[\Delta x\to 0]{} F'(\xi)} - f(\xi)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_\xi^{\xi+\Delta x} f(t)\,dt - f(\xi)\right| \overset{\uparrow}{=}$$

1-я теор. о среднем

μ лежит между inf и sup ф-ции f на отрезке между ξ и $\xi+\Delta x$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\cdot\mu\cdot\underbrace{\int_\xi^{\xi+\Delta x} 1\,dt}_{=\Delta x} - f(\xi)\right| = |\mu - f(\xi)| \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$$ в силу непр-ти f в точке ξ ч.т.д. ∎

Следствие

Если $f\in C[a,b]$, то ф-ия $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ явл. одной из первообразных для f на $[a,b]$

Th2 (ф-ла Ньютона - Лейбница)

Пусть $f\in C[a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b)-\varphi(a) = \varphi(x)\Big|_a^b$, где φ - $\forall$ из первообр-х для f на $[a,b]$

▶ Д-во: Положим $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$.
Пусть Φ - произвольная перв-я для f на $[a,b] \Rightarrow \Phi(x)=F(x)+C$ $\forall x\in[a,b]$. Значит, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-\underbrace{F(a)}_{=0} = \Phi(b)-\cancel{C}-\Phi(a)+\cancel{C}$ ч.т.д. ∎

Билет 12

Опр Будем говорить, что ф-ия f - ~~непр-но дифф-ма~~ на $[a,b]$ $(f \in C^1[a,b])$, если $f'(x)$ $\exists$ и непр-на на $\forall x \in [a,b]$ и $\exists$ конечные $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f'(x)$

Th1 (замена переменной в опр. инт-ле)

Пусть $f \in C[a,b]$; $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, где $\min\limits_{\alpha \le t \le \beta} \varphi(t) = \varphi(\alpha) = a$

$\max\limits_{\alpha \le t \le \beta} \varphi(t) = \varphi(\beta) = b$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

▶ **Д-во:** Пусть Φ - первообр-я для f на $[a,b]$.
Тогда $\Phi(\varphi)$ диф-ма на $[\alpha,\beta]$ как сложная ф-ция, причем $(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \underset{\text{Н.-Л.}}{=} \Phi(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) \underset{\text{Н.-Л.}}{=} \int_a^b f(x)\,dx.$$

ч.т.д.

Пример. $(a>0)$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ 0 \le t \le \pi/2 \\ dx = a\cos t\,dt \end{matrix} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi a^2}{4}$$

■

Th2 (инт-ие по частям в опр-м интеграле)

Пусть $f, g \in C^1[a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = f(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$

▶ **Д-во:** Φ_{func} $f(x) \cdot g(x)$ - первообр-я для $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ на $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b$ ■

Формула Тейлора с остаточным членом в ин-ой форме

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \quad \xi \in [a, b]$$

Билет 13 стр 391

Опр Мн-во $\{M\}$ всех точек M координаты x и y которых опр-ся уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ наз простой плоской кривой L, если различным значениям параметра $t \in [\alpha, \beta]$ отвечают разные точки мн-ва $\{M\}$.

Опр Будем говорить, что конечная или бесконечная система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ разбивает мн-во $\{t\}$, если 1) объединение этих мн-в – все мн-во

2) общими точками $\forall$ 2 сегментов могут быть лишь их концы

Опр Будем говорить, что $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ задают параметризуемую кривую L, если $\exists$ такая система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, разби-их мн-во $\{t\}$ что для значений t из каждого сегмента этой системы ур-я опр-ют простую кривую

Билет 14

Опр Мн-во $A \subset \mathbb{R}^2$ наз. **ограниченным**, если $\exists R > 0$ т.ч. $A \subset B_R(0)$, $0 = (0,0)$

Плоской фигурой будем называть $\forall$ огр-ое мн-во $F \subset \mathbb{R}^2$

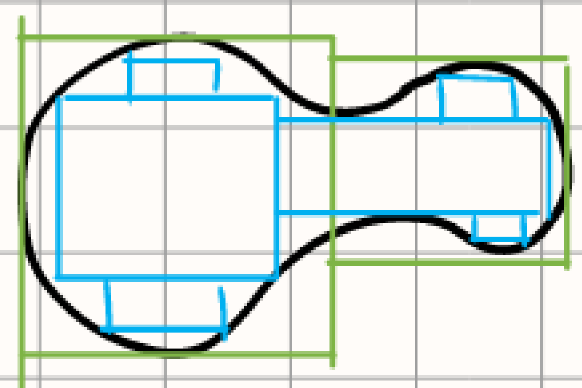
Опр **Простейшими** будем наз. фигуры представляющие собой объединение конечного числа прямоугольников со сторонами $\parallel$ осям координат

Опр **Верхней (нижней) площадью** фигуры F наз-ся

$$S^*(F) = \inf_{Q \supset F} \{S(Q)\} \quad \left[S_*(F) = \sup_{P \subset F} \{S(P)\} \right], \text{ где}$$

inf берется по всем простейшим фигурам $Q \supset F$

sup – по всем простейшим $P \subset F$



Опр Фигура F наз **квадрируемой**, если $S_*(F) = S^*(F)$. В этом случае

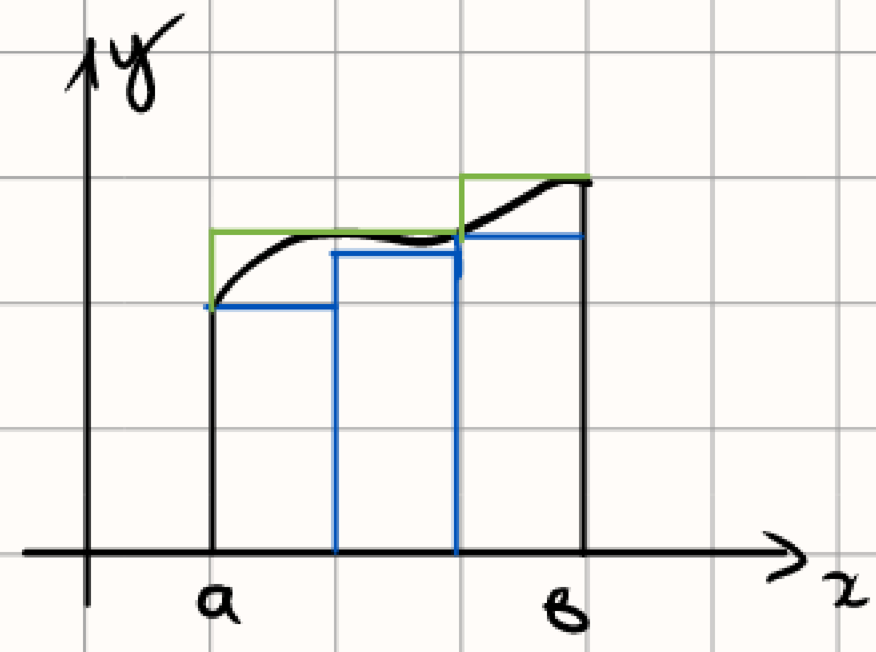
$$S(F) := S_*(F) - S^*(F) \text{ — площадь } F$$

Лемма 1 (Критерий квадр-ти через простейшие)

Фигура F квадр-ма $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P, Q$ - простейшие, т.ч. $P \subset F \subset Q$ причем $S(Q) - S(P) < \varepsilon$

Д-во: $(\Rightarrow)$ $S^*(F) = S_*(F) =: S(F)$. Возьмем $\varepsilon > 0$.
Из опр-я $\Rightarrow$ $\exists Q \supset F$ - простейшая, т.ч. $0 \le S(Q) - S(F) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Аналогично $\exists P \subset F$ - простейшая, т.ч. $0 \le S(F) - S(P) < \varepsilon/2$
$\Rightarrow S(Q) - S(P) < \varepsilon$.
$(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P, Q$, т.ч. $P \subset F \subset Q$ и $S(Q) - S(P) < \varepsilon$
Заметим, что $S(P) \le S_*(F) \le S^*(F) \le S(Q) \Rightarrow$
$0 \le \underbrace{S^*(F) - S_*(F)}_{\text{не зависят от } \varepsilon} \le S(Q) - S(P) < \varepsilon \Rightarrow S^*(F) = S_*(F)$.
ч.т.д. ■

Оп **Криволинейной трапецией** наз-ся фигура F ограниченная графиком ф-ии $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, $f\in C[a,b]$; вертик-ми прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox.



Th (Площадь криволин-ой трапеции)

Криволинейная трапеция F квадрируема и

$S(F)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Д-во: $f\in C[a,b] \Rightarrow f\in R[a,b]$.
Возьмем $\varepsilon>0$. $\exists T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ - разб-е $[a,b]$: $S_f(T)-s_f(T)<\varepsilon$. С др. стороны, $S_f(T)=\sum_{k=1}^n M_k\cdot\Delta x_k=$
$=\sum_{k=1}^n S(Q_k)=S(Q)$, где $Q=\bigcup_{k=1}^n Q_k$ - простейшая,
Q_k - прямоуг-к со сторонами $[0,M_k]$ и $[x_{k-1},x_k]$.
При этом $Q\supset F$. Аналогично $s_f(T)=\sum_{k=1}^n m_k\cdot\Delta x_k=$
$=\sum_{k=1}^n S(P_k)=S(P)$, $P=\bigcup_{k=1}^n P_k$ - простейшая, $P\subset F$.
Значит, $P\subset F\subset Q$, $S(Q)-S(P)<\varepsilon \Rightarrow F$ квадр-ма (л. 1)

Далее, $\left.\begin{array}{l} s_f(T)\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S_f(T) \\ S(P)\leq S(F)\leq S(Q)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\underbrace{\left|\int_a^b f(x)\,dx - S(F)\right|}_{\text{не зависят от } \varepsilon}<\varepsilon \Rightarrow S(F)=\int_a^b f(x)\,dx$.

ч.т.д.

■

Билет 15

Билет 14+

Лемма (Критерий кв-ти через приближение квадр-ми)

Фигура квадрируема $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F_1, F_2$ – квадр-е фигуры т.ч. $F_1 \subset F \subset F_2$, причем $S(F_2)$

▶

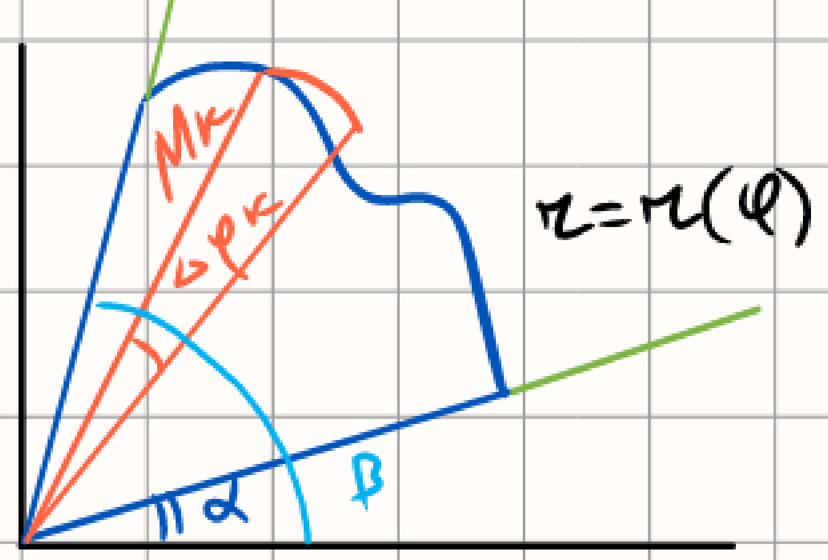
Д-во: $\boxed{\Rightarrow}$ сразу следует из л.1, т.к. простейшие явл-ся квадрируемыми.

$\boxed{\Leftarrow}$ Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть F_1, F_2 – квадр-мы, $F_1 \subset F \subset F_2$, $S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon/2$. Из л.1 $\Rightarrow \exists P_1, Q_1, P_2, Q_2$ – простейшие, т.ч. $P_j \subset F_j \subset Q_j$; $S(Q_j) - S(P_j) < \varepsilon/4$; $j = 1, 2$.

Тогда $P_1 \subset F_1 \subset F \subset F_2 \subset Q_2$; $S(Q_2) - S(P_1) =$

$= \underbrace{S(Q_2) - S(P_2)}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{S(P_2) - S(Q_1)}_{\leq S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon/2} + \underbrace{S(Q_1) - S(P_1)}_{<\varepsilon/4} < \varepsilon \Rightarrow F$ квадр-ма (л.1) ч.т.д. ■

Опр Криволинейным сектором наз. фигура огр-я кривой $r = r(\varphi)$ в полярных коор-ах $\varphi \in [\alpha, \beta]$, $r \in C[\alpha, \beta]$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\beta - \alpha < 2\pi$)



Th Криволинейный сектор F – квадр-м и $S(F) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$

▶ Д-во: Обозначим $f = \frac{1}{2}r^2$.

$f \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f \in R[\alpha, \beta]$. Возьмем $\varepsilon > 0$.

$\exists T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ – разб-е $[\alpha, \beta]$: $S_f(T) - s_f(T) < \varepsilon$

С др. стороны, $S_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{2} M_k^2 \Delta\varphi_k}_{\text{площадь круг. сектора}} = \sum_{k=1}^{n} S(F_k^1) = S(F^1)$,

$M_k = \sup\limits_{\varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k} r(\varphi)$

где $F^1 = \bigcup_{k=1}^{n} F_k^1$ – квадр-я, F_k^1 – круг. сектор радиуса M_k и раствора $\Delta\varphi_k$; $F^1 \supset F$.

Аналогично $s_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k^2 \Delta\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} S(F_k^2) = S(F^2)$,

где F^2 – квадр-я, $F^2 \subset F$.

Значит, $F^2 \subset F \subset F^1$, $S(F^1) - S(F^2) < \varepsilon \Rightarrow$

F квадр-ма. Далее как в т.1. ч.т.д. ■

Билет 18

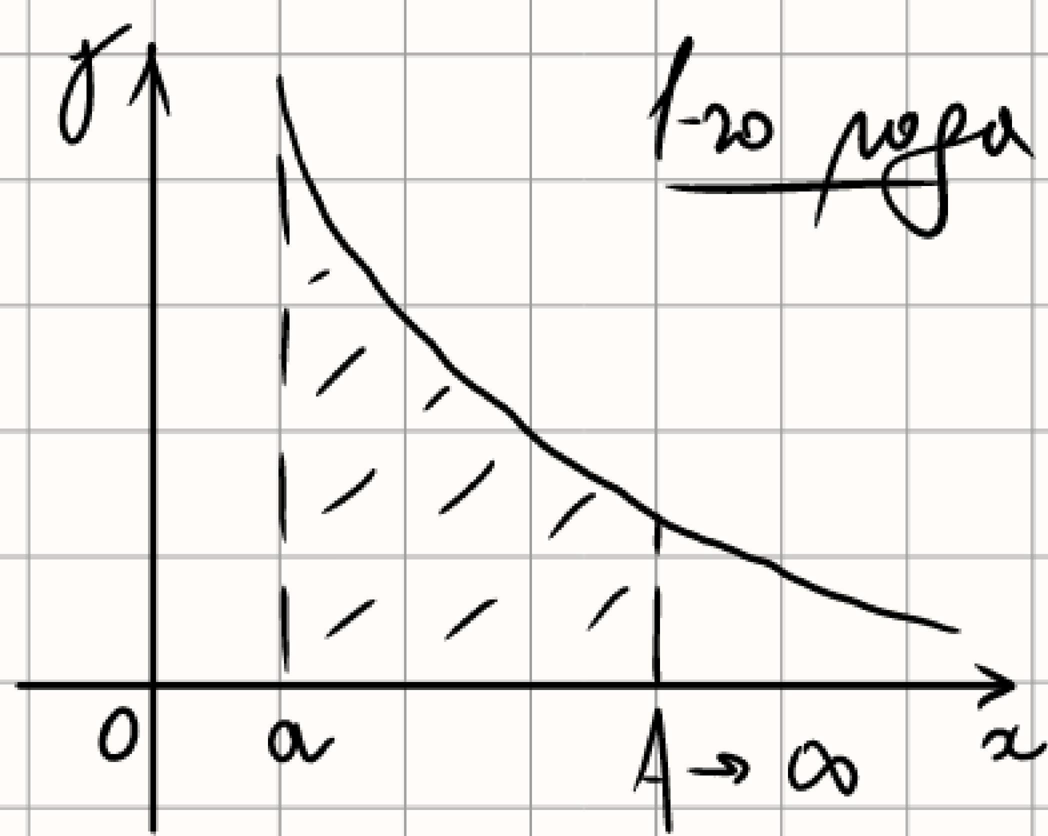
Опр $\exists f \in R[a, A]$ $\forall A > a$. **Несобственным интегралом 1-го рода** от ф-ии f на $[a, +\infty]$ наз. выражение $\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$

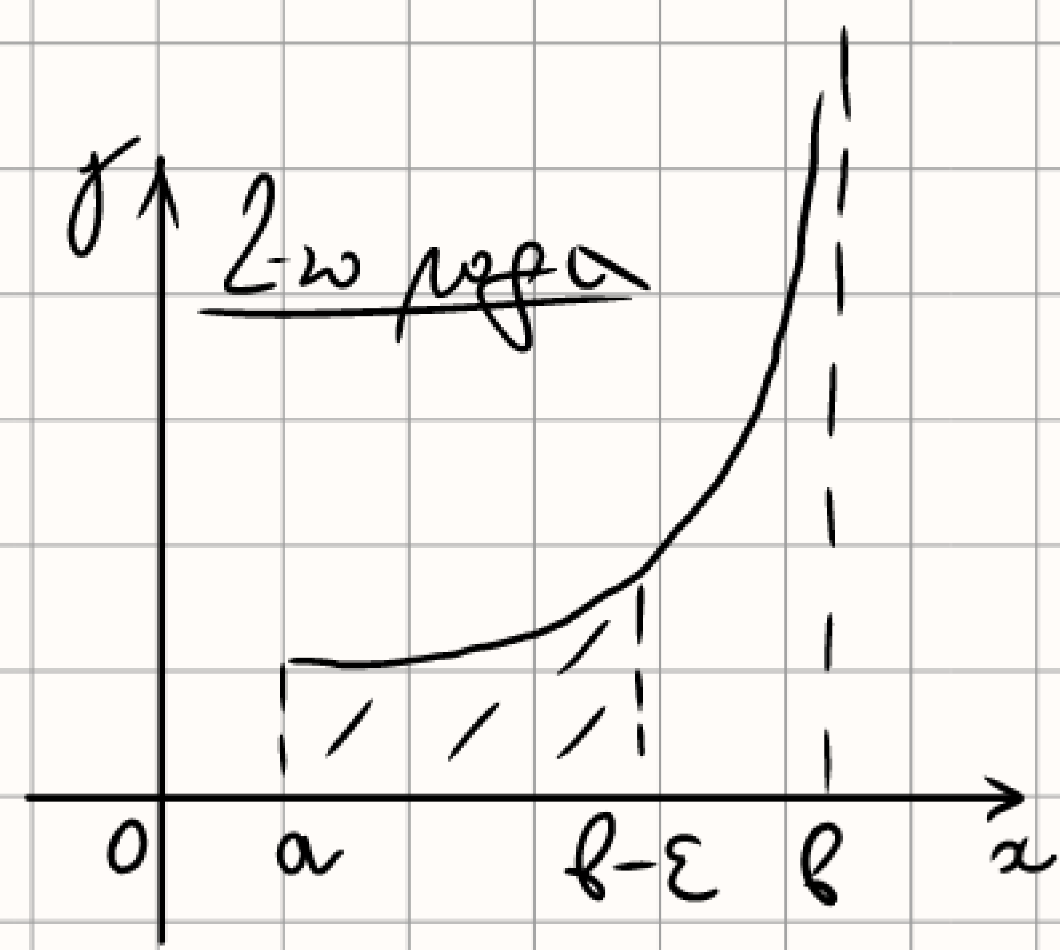
Если предел в правой части $\exists$, то говорят, что инт-л **сходится**, иначе **расходится**.

Опр $\exists$ ф-ия f опр-на на $[a, b)$, $f \in R[a, b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$

$f \notin R[a, b]$. **Интегралом (несобственным) 2-го рода** от f на $[a, b]$ наз. выражение $\int_a^b f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

Если предел в правой части $\exists$, то говорят, что инт-л **сходится**, иначе **расходится**.





Т1 (замена перем-й в несоб. инт-ле 1-го рода)

$\exists$ 1) $f \in C[a, +\infty]$

2) $\varphi \in C^1[\alpha, +\infty)$

3) φ возр-т на $[\alpha, +\infty)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$; $\varphi(\alpha) = a$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

(оба инт-ла сх-ся и рас-ся одновременно; в случае сх-ти равны)

▶ сх-ти равны).

Д-во: Пусть $A > a$, тогда $\exists!\ \beta > \alpha$, т.ч. $\varphi(\beta) = A$. Значит

$\int_a^A f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$ ч.т.д.

$A \to +\infty \Leftrightarrow \beta \to +\infty$ ◼

Th2 (инт-ие по частям)

$\rceil$ $f, g \in C^1[a, +\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ сх-ся или расх-ся одновременно и в случае сх-ти

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = L - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$$

▶ случае сходимости: $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = L - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.$

Д-во: $\forall A > a$: $\int_a^A f(x)g'(x)\,dx = f(A)g(A) - f(a)g(a) - \int_a^A f'(x)g(x)\,dx$ ч.т.д. ◼

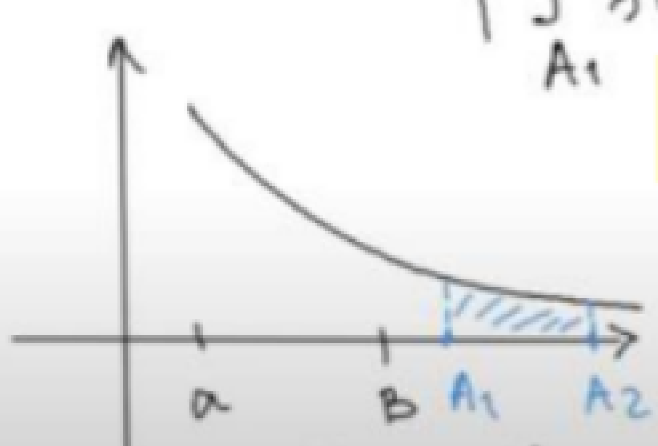
$A \to +\infty$

Th3 (Критерий Коши сх-ти инт-ов 1-го рода)

$\rceil$ $f \in R[a, A]$ $\forall A > a$. Инт-ал $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists B(\varepsilon) > 0$ т.ч. $\forall A_1, A_2 \in (B; +\infty)$ $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

▶ $\left|\int_{A_1} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.



(кр. Коши сущ-я предела ф-ции при $A \to +\infty$)

Д-во: Обозначим $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$.

$\exists \lim\limits_{A\to+\infty} F(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A_1, A_2 \in (B; +\infty)$:

$|F(A_2) - F(A_1)| < \varepsilon$ ч.т.д. ◼

$= \int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx$

Th4 (признак сравнения)

1) $\rceil$ $f \in R[a, A]$ $\forall A > a$ и $|f(x)| \le g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$

Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся

2) $\rceil$ $0 \le g(x) \le f(x)$. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх-ся

$\int_a f(x)\,dx$ расх-ся.

Д-во: 1) Возьмем $\varepsilon>0$. $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся $\Rightarrow$ $\exists B(\varepsilon)>a$, т.ч. $\forall A_1, A_2$, $B<A_1<A_2$: $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \le$
$\le \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx = \left|\int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся (кр. Коши)

2) От противного: пусть $0 \le g(x) \le f(x)$, $x \ge a$.
Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже сх-ся (пункт 1), а это не так по условию. ч.т.д.

На практике: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow$ достаточно, чтобы нер-ва из усл-я теоремы выполнялись $\forall x \ge b$.

Замечание. Из т. 4 $\Rightarrow$ если $f, g \ge 0$ и $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} C\cdot g(x)$ $(C\ne 0)$, то инт-лы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся или расх-ся одновременно.

Билет 19

Опр Несобственный интеграл сх-ся абсолютно, если сх-ся интеграл от модуля ф-ии

Опр Несобственный интеграл сх-ся условно, если интеграл сх-ся, а от модуля ф-ии расх-ся

Th1 (Признак Абеля-Дирихле)

$\exists$ $f(x)$ имеет огр. первообразную, $g(x)$ монотонно стремиться к 0 при $x\to+\infty$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сх-ся

Оп 1) Несоб. инт-л 1-го рода

∃ ф-ия f опр на $(-\infty; +\infty)$ и $f \in R[a, b]$

(внутри $(-\infty, +\infty)$ нет особых точек)

Предел отвечающий частному случаю $b = -a$

наз. главным значением ин-ла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$$

2) Несоб инт-л 2-го рода

∃ ф-ия $f(x)$ задана на $[a, b]$, c - ед. особая точка на $[a, b]$

ф-ия $f(x) \in R[c, d]$, $[c, d] \subset [a, b]$, $c \notin [c, d]$

Предел отвечающий частному случаю $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

наз. главным значением ин-ла $\int_a^b f(x)dx$

$$V.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right)$$

Билет 20

$\rceil$ $f \in C[a,b]$ Возьмём $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$; $d_1, \ldots, d_n > 0$

Обозначим $c = \dfrac{d_1 f(x_1) + \ldots + d_n f(x_n)}{d_1 + \ldots + d_n}$ – усреднённое значение $f(x_1), \ldots, f(x_n)$

Лемма 1 Если $f \in C[a,b]$, то $\exists\, \xi \in [a,b]$ т.ч. $f(\xi) = c$

▶ $\rceil$ $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда $m \le f(x) \le M$

Умн-им нер-во на $d_1, d_2, \ldots$ и сложим

$$m\,(d_1 + \ldots + d_n) \le d_1 f(x_1) + \ldots + d_n f(x_n) \le M\,(d_1, \ldots, d_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \le c \le M$$

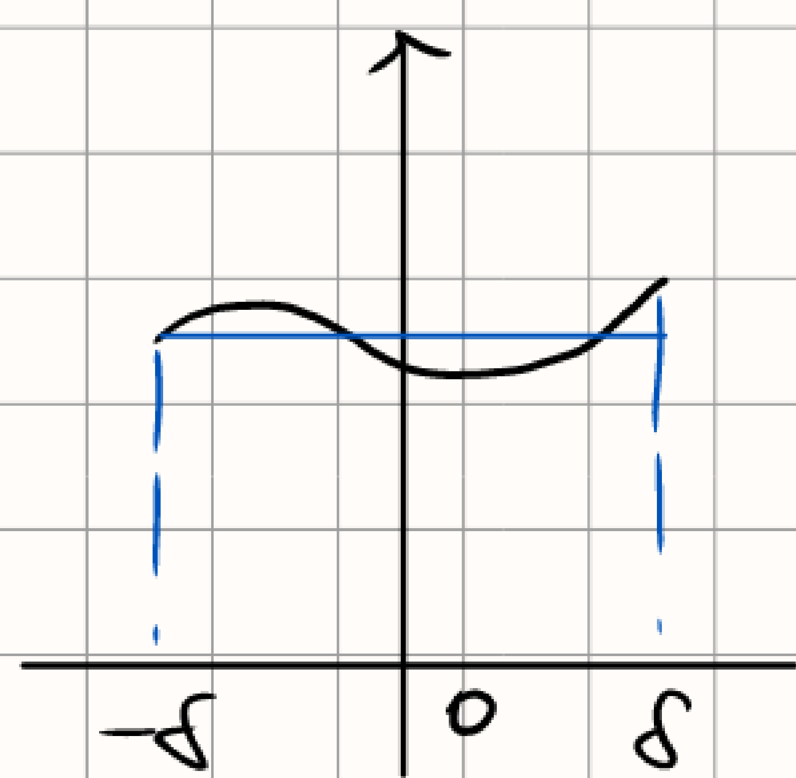
$$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] : f(\xi) = c \quad ■$$

Идея $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \approx f(\xi)(b-a) = \underset{\displaystyle \frac{d_1 f(x_1) + \ldots + d_n f(x_n)}{d_1 + \ldots + d_n}}{\underset{\|}{c}}(b-a)$

То есть $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a) + R$ остаток

Метод прямоугольников выч. опр-ых инт-ов

$\rceil$ $f \in C^2[a,b]$



$\sphericalangle$ $[-\delta, \delta]$, $n = 1$, $a = -\delta$, $b = \delta$

$x_1 = 0$, $d_1 = 1$ Тогда

$\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = f(0)\,2\delta + R$ и оценим остаток

$\rceil$ F – $\forall$ из первообр. для f на $[a,b]$

Тогда $R = \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx - 2\delta f(0) = F(\delta) - F(-\delta) - 2\delta f(0)$

$\rceil$ $\varphi(x) = F(x) - F(-x)$, тогда $\varphi' = f(x) + f(-x)$

Разложим ψ по ф-ле Тейлора

$$\underbrace{\psi(\delta)}_{F(\delta)-F(-\delta)} = \underbrace{\psi(0)}_{F(0)-F(0)=0} + \underbrace{\frac{\psi'(0)}{1!}\delta}_{2f'(0)} + \underbrace{\frac{\psi''(0)}{2!}\delta^2}_{f'(0)-f'(0)=0} + \underbrace{\frac{\psi'''(\xi)}{3!}\delta^3}_{\text{форма Лагранжа}}, \quad 0<\xi<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \psi(\delta) - 2f(0)\delta = \frac{\psi'''(\xi)}{3!}\delta^3 = \frac{f''(\xi)+f''(\xi)}{\underbrace{3\cdot 2}_{\text{усредн. значение}}}\delta^3 =$$

$$= \{\text{Лемма 1}\} = f''(\xi_1)\cdot\frac{\delta^3}{3}, \quad \xi_1 \in [-\delta, \delta]$$

Вернемся к $[a, b]$, разобьем его на n равных частей

$$x_k = a + \frac{b-a}{2n}k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

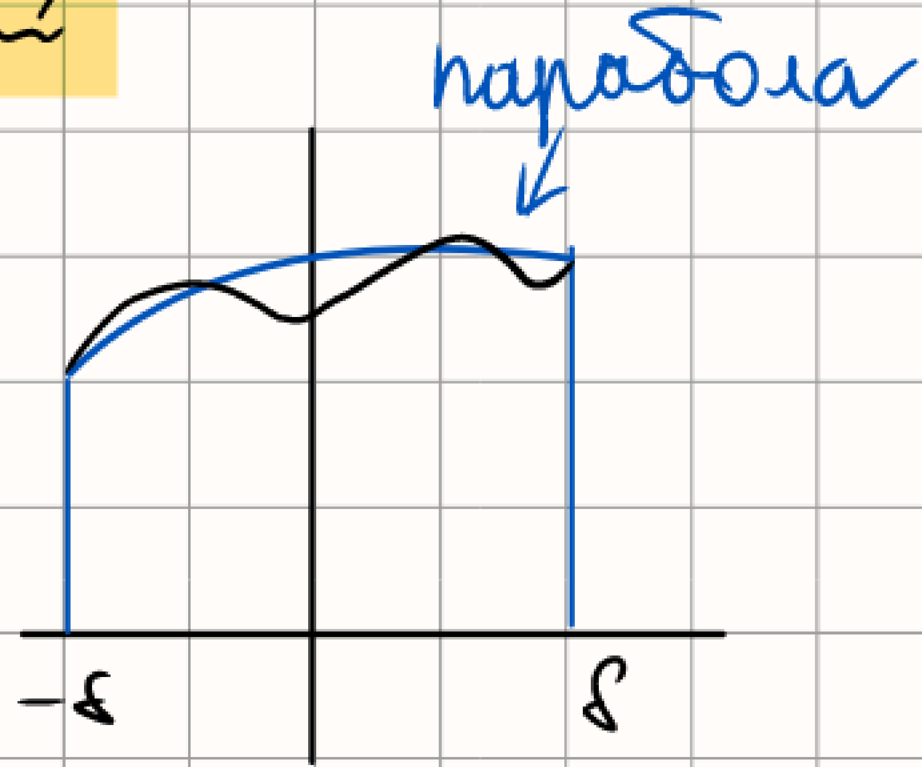
Тогда $x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{b-a}{n}$. Получаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\frac{b-a}{n} + \tilde{R}, \text{ где}$$

$$\tilde{R} = R_1 + R_2 + \dots + R_{2n-1} = \left(f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_{2n-1})\right)\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_{2n-1})}{n}\frac{(b-a)^3}{24n^2} = f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Метод парабол (метод Симпсона)



$\exists\, f \in C^4[a, b]$

$$\tilde{R} = R_1 + R_2 + \dots + R_{2n-1} = -\frac{f^{(4)}(\tilde{\xi})(b-a)^5}{2880\, n^4} = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$\tilde{\xi} \in [a, b]$

Билет 21

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)+\tilde{R}$$

$$\tilde{R} = R_1 + \ldots + R_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3\left(f''(\xi_1)+\ldots+f''(\xi_n)\right) =$$

$$= -\frac{f''(\tilde{\xi})}{12n^2}(b-a)^3 = \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \tilde{\xi} \in [a, b]$$

Билет 22

Опр 1 Пр-во $\mathbb{R}^n$ (n-мерным действ-м пр-ом) наз. мн-во всех наборов вида $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$ с введенной на нём структурой лин. пр-ва относительно оп. сложения:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

и умножения на скаляр $\alpha \vec{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Это пр-во явл. евклидовым относительно скал. пр-ия

$$(\vec{x}, \vec{y}) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

На нём можно ввести норму (длину) $\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ и метрику (расстояние) $\rho(x, y) := \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Эл. пр-ва $\mathbb{R}^n$ будем наз. точками (векторами)

Опр 2 Π $\varepsilon > 0$. ε-окрестностью точки $\vec{x^0} = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ наз-ся мн-во $B_\varepsilon(\vec{x^0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\vec{x}, \vec{x^0}) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \varepsilon\}$

Опр 3 Π $A \subset \mathbb{R}^n$. Точка $\vec{x^0}$ наз. внутренней точкой мн-ва A, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\vec{x^0}) \subset A$

$\vec{x^0}$ наз. внешней точкой A, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\vec{x^0}) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$

Точка $\vec{x^0}$ наз. граничной точкой A если $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(\vec{x^0}) \cap A \neq \varnothing$ и $B_\varepsilon(\vec{x^0}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \varnothing$

Опр Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. **открытым**, если все его точки внутренние. Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. **замкнутым**, если мн-во $\mathbb{R}^n \setminus A$ открыто.

Опр Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. ограниченным, если $\exists R > 0$: $A \subset B_R(0)$

Опр **n-мерным шаром с центром в точке $\vec{x^0}$ радиуса R** наз. мн-во $B_R(\vec{x^0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R} \mid \rho(\vec{x}, \vec{x^0}) < R\}$

Мн-во $\overline{B}_R(\vec{x^0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R} \mid \rho(\vec{x}, \vec{x^0}) < R\}$ - **замкнутый n-мерный шар**. Мн-во $S_R(\vec{x^0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \rho(\vec{x}, \vec{x^0}) = R\}$ - **n-мерная сфера**.

Билет 23

Опр **Последовательностью** в $\mathbb{R}^n$ наз-ся отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Будем также послед-тью называть образ при этом отображении, т.е. мн-во

$\{\vec{x^m}\}_{m=1}^{+\infty}$, где $\vec{x^m} = (x_1^m, \ldots, x_n^m) \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$

Посл-ть сходится к точке $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N$: $\rho(\vec{x^m}, \vec{a}) < \varepsilon$

Пишут $\lim\limits_{m \to +\infty} \vec{x^m} = \vec{a}$ или $\vec{x^m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \vec{a}$

Будем говорить, что $\vec{x^m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N$ $\|\vec{x^m}\| > \frac{1}{\varepsilon}$

Th1 (критерий Коши сх-ти посл-ти в $\mathbb{R}^n$)

Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ сх-ся $\iff$ она фундаментальна

▶ $\{\vec{x}^m\}$ - сх-ся $\iff$ {Лемма 1} $\iff$

Лемма 1 Посл-ть $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{a} \in \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} x_1^m \to a_1 \\ \vdots \\ x_n^m \to a_n \end{cases}, m \to +\infty$

▶ Д-во: ($\Rightarrow$) Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$:

$|x_k^m - a_k| \leq \sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \dots + (x_n^m - a_n)^2} = \rho(\vec{x}^m, \vec{a}) < \varepsilon$

$\Rightarrow x_k^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} a_k$, $k = 1, \dots, n$.

($\Leftarrow$) Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$. $\exists N_k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N_k$: $|x_k^m - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Положим $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$,

тогда $\forall m \geq N$: $\rho(\vec{x}^m, \vec{a}) = \sqrt{\underbrace{(x_1^m - a_1)^2}_{<\varepsilon^2/n} + \dots + \underbrace{(x_n^m - a_n)^2}_{<\varepsilon^2/n}} < \varepsilon \Rightarrow \vec{x}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{a}$ ч.т.д. ■

$\iff \{x_1^m\}, \dots, \{x_n^m\}$ - сх-ся $\iff$

$\iff \{x_1^m\}, \dots, \{x_n^m\}$ - фун-ны $\iff$ {Лемма 2} $\iff$

Лемма 2 Посл-ть фунд-на $\iff$ все посл-ти $\{x_k^m\}$ $k = \overline{1, n}$ явл. фунд-ми

▶ Д-во: ($\Rightarrow$) Возьмем $\varepsilon > 0$, $k \in \{1, \dots, n\}$, тогда $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N$, $\forall p \in \mathbb{N}$: $|x_k^m - x_k^{m+p}| \leq \rho(\vec{x}^{m+p}, \vec{x}^m) < \varepsilon$

$\Rightarrow \{x_k^m\}$ фунд-на.

($\Leftarrow$) Пусть $\varepsilon > 0$, $k \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \exists N_k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N_k$, $\forall p \in \mathbb{N}$: $|x_k^m - x_k^{m+p}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Пусть $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, тогда $\forall m \geq N$: $\rho(\vec{x}^m, \vec{x}^{m+p}) < \varepsilon$. ч.т.д. ■

$\iff \{\vec{x}^m\}$ - фун-на ■

Th2 (Больцано - Вейерштрасса)

Из $\forall$ огр-ой посл-ти $\{\vec{x}^m\}$ в пр-ве $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходя-юся подпосл-ть.

Д-во: Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ ограничена $\Rightarrow$ каждая из посл-тей $\{x_1^m\}, \dots, \{x_n^m\}$ ограничена.
Рассм. посл-ть $\{x_1^m\}$. Она ограничена $\Rightarrow$ из неё можно выделить сх-ся подпосл-ть $x_1^{m_{k_1}} \xrightarrow[k_1 \to +\infty]{} a_1$.
Рассм. теперь посл-ть $\{x_2^{m_{k_1}}\}_{k_1=1}^{+\infty}$. Она огр-на $\Rightarrow$ из неё можно выделить сх-ся подпосл-ть $x_2^{m_{k_2}} \xrightarrow[k_2 \to +\infty]{} a_2$
И т.д., наконец, из $\{x_n^{m_{k_{n-1}}}\}$ выделим сх-ся $x_n^{m_{k_n}} \xrightarrow[k_n \to +\infty]{} a_n$. Тогда посл-ть $\vec{x}^{m_{k_n}} \to \vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ (т.к. $x_n^{m_{k_n}} \to a_n$, $x_{n-1}^{m_{k_n}} \to a_{n-1}, \dots, x_1^{m_{k_n}} \to a_1$) ч.т.д.

Билет 24

Оп Ф-ией n-переменных наз. отображение $f: X \to Y$ где $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$. X – область опр-ия. Y – мн-во значений.

Пишут $y = f(\vec{x})$ или $y = f(x_1, \dots, x_n)$

Оп1 (предел ф-ии по Гейне)

Число $b \in \mathbb{R}$ наз. пределом ф-ии f в точке $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall$ посл-ть $\{\vec{x}^m\}$, $\vec{x}^m \in X$, $\vec{x}^m \neq \vec{a}$, $\vec{x}^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \vec{a}$: $\lim\limits_{m \to +\infty} f(\vec{x}^m) = b$

Оп2 (предел по Коши)

Число $b \in \mathbb{R}$ наз. пределом ф-ии f в точке $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \vec{x} \in X$, $0 < \rho(\vec{x}, \vec{a}) < \delta$: $|f(\vec{x}) - b| < \varepsilon$

Оп Число $b \in \mathbb{R}$ наз. пределом ф-ии f при $\vec{x} \to +\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \vec{x} \in X$ $\|\vec{x}\| > \frac{1}{\delta}$ $|f(\vec{x}) - b| < \varepsilon$

Th1 (теор. об арифм-их св-ах пределов)

Пусть f, g опр-ны на X, $\vec{a}$ – предельная точка X;

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = b$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) = c$

Тогда $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) \pm g(\vec{x})) = b \pm c$; $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) = bc$

если $c \neq 0$, то $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{b}{c}$

Th2 (критерий Коши $\exists$ предела ф-ии в $\mathbb{R}^n$)

Ф-ия f имеет конечный предел в т. $\vec{a}$ $\Leftrightarrow$ f удов-ет усл. Коши в этой точке

f удовл-т усл-ю Коши в этой точке.

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = b$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \vec{x} \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X$: $|f(\vec{x}) - b| < \varepsilon/2$. Значит, $\forall \vec{x}', \vec{x}'' \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X$:

$|f(\vec{x}') - f(\vec{x}'')| \leq |f(\vec{x}') - b| + |f(\vec{x}'') - b| < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Рассм. посл-ть $\{\vec{x}^m\}$, т.ч. $\vec{x}^m \in X$, $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{a}$, $\vec{x}^m \neq \vec{a}$. Возьмем δ из усл-я Коши; $\exists N(\delta) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N$: $\vec{x}^m \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X$. Тем более, $\forall m \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$: $\vec{x}^{m+p} \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X$;

Из усл-я Коши $\Rightarrow$ $|f(\vec{x}^{m+p}) - f(\vec{x}^m)| < \varepsilon$ $\forall m \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$.
Значит, числовая посл-ть $\{f(\vec{x}^m)\}$ фундаментальна $\Rightarrow$ сходится.
Покажем, что предел $\{f(\vec{x}^m)\}$ не зависит от выбора посл-ти $\{\vec{x}^m\}$. Пусть $\vec{x}^{m'} \to \vec{a}$, $\vec{x}^{m'} \neq \vec{a}$; $\vec{x}^{m''} \to \vec{a}$, $\vec{x}^{m''} \neq \vec{a}$; $f(\vec{x}^{m'}) \to b'$; $f(\vec{x}^{m''}) \to b''$.
Рассм. посл-ть $\{\vec{x}^m\} = \{\vec{x}^{1'}, \vec{x}^{1''}, \vec{x}^{2'}, \vec{x}^{2''}, \ldots\}$;
тогда $\vec{x}^m \to \vec{a}$, $\vec{x}^m \neq \vec{a}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{m\to+\infty} f(\vec{x}^m) = b$.
Посл-ти $\{f(\vec{x}^{m'})\}$ и $\{f(\vec{x}^{m''})\}$ – подпосл-ти сх-ся посл-ти $\{f(\vec{x}^m)\}$ $\Rightarrow$ $b' = b'' = b$. ч.т.д.

Опр Пусть $\vec{a}$ - предельная т. X ($\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ или $\vec{a} = \infty$)

Ф-ия f удов-ет усл. Коши в точке $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ (при $\vec{x} \to \infty$)

если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ т.ч. $\forall \vec{x}', \vec{x}'' \in X$ $0 < \rho(\vec{x}', \vec{a}) < \delta$
$0 < \rho(\vec{x}'', \vec{a}) < \delta$

$$|f(\vec{x}') - f(\vec{x}'')| < \varepsilon$$

Билет 25

Опр Пусть ф-ия f опр-на на мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in X$

$\vec{a}$ - предельная точка X. Ф-ия f непр-на в т. $\vec{a}$, если $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$

Опр (по Гейне) ф-ия f непр-на в точке $\vec{a}$, если $\forall$ посл-ти $\{\vec{x}^m\}$ аргументов, т.ч. $\vec{x}^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \vec{a}$: $f(\vec{x}^m) \xrightarrow[m \to +\infty]{} f(\vec{a})$

Опр (по Коши) ф-ия f непр-на в точке $\vec{a}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$, т.ч. $\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{a}) \cap X$: $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$

Th1 (арифм-ие операции)

Пусть f, g опр-ны на мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$; $\vec{a} \in X$, $\vec{a}$ - пред. точка X

Если f и g непр-на в точке $\vec{a}$, то $f \pm g$, $f \cdot g$ и если $g(\vec{a}) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ непр-ны в т. $\vec{a}$.

Th2 (сохр-ие знака)

Пусть f непр-на в т. $\vec{a}$. Если $f(\vec{a}) > 0$ $[< 0]$, то $\exists \delta > 0$, т.ч. $f(\vec{x}) > 0$ $[< 0]$ $\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{a}) \cap X$.

Th3 (локальная огр-ть)

Если f непр-на в т. $\vec{a}$, то $\exists\, \delta > 0$: f-огр-на на мн-ве $B_\delta(\vec{a}) \cap X$

Th4 (непр-ть сложной ф-ии)

Пусть каждая из ф-ий $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ непр-на в т. $\vec{t^0} \in T$. Если ф-ия f непр-на в т. $\vec{x^0}$, где $x_1^0 = \varphi_1(\vec{t^0}), \dots, x_n = \varphi_n(\vec{t^0})$, то сложная ф-ия $f(\vec{\varphi})$ непр-на в т. $\vec{t_0}$

сложная ф-ция $f(\varphi)$ непр-на в точке t

Д-во: Рассмотрим произвольную послед-ть $\{\vec{t^m}\}$, $\vec{t^m} \in T$, $m \in \mathbb{N}$; $\vec{t^m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{t^0}$. Тогда $\varphi_1(\vec{t^m}) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \varphi_1(\vec{t^0}) = x_1^0$,
$\dots$ $\varphi_n(\vec{t^m}) \to \varphi_n(\vec{t^0}) = x_n^0$

Обозначим $x_1^m = \varphi_1(\vec{t^m}), \dots, x_n^m = \varphi_n(\vec{t^m})$, $m \in \mathbb{N}$.

Тогда
$$\begin{cases} x_1^m \to x_1^0 \\ \dots \\ x_n^m \to x_n^0 \end{cases} \iff \vec{x}^m \to \vec{x^0}, \quad \vec{x}^m = (x_1^m, \dots, x_n^m), \quad \vec{x^0} = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$
$m \to +\infty$

При этом $\vec{x}^m \in X$, $\vec{x^0} \in X$; f непр-на в точке $\vec{x^0}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(\vec{x}^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} f(\vec{x^0}) \\ f(\vec{x}^m) = f(\varphi_1(\vec{t^m}), \dots, \varphi_n(\vec{t^m})), \quad f(\vec{x^0}) = f(\varphi_1(\vec{t^0}), \dots, \varphi_n(\vec{t^0})) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\vec{\varphi}) \text{ непр-на в точке } \vec{t^0}$$

(опр-е по Гейне)

ч.т.д.

Билет 26

Опр Пусть ф-ия f опр-на на мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in X$, $\vec{a}$ — предельная точка X. Ф-ия f непр-на в т. $\vec{a}$, если $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$

Опр (по Гейне) ф-ия f непр-на в т. a если $\forall$ посл-ти $\{\vec{x}^m\}$ аргументов, т.ч. $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{a}$: $f(\vec{x}^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} f(\vec{a})$

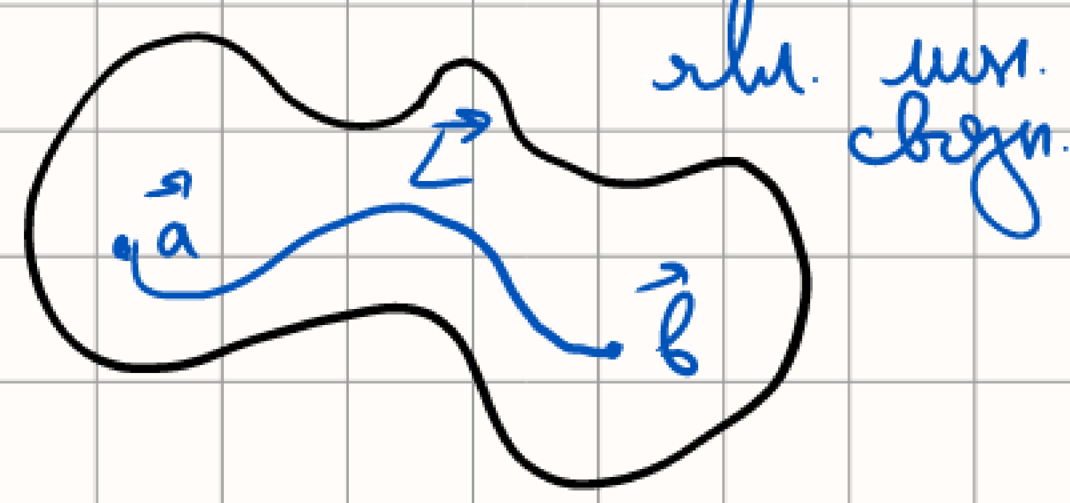
Опр (по Коши) ф-ия f непр-на в т $\vec{a}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon)$, т.ч.

$\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{a}) \cap X : \ \left| f(\vec{x}) - f(\vec{a}) \right| < \varepsilon$

Опр Непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$ наз. мн-во

$$L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t), t \in [\alpha, \beta]; \varphi_1, \dots, \varphi_n \in C[\alpha, \beta]\}$$

Опр Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся линейно связным, если $\forall$ 2 точки мн-ва X можно соединить непр-ой кривой L целиком лежит в X ($\vec{a}, \vec{b} \in X \Rightarrow \exists L = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), t \in [\alpha, \beta]\}$ т.ч. $(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) = \vec{a}$; $(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta)) = \vec{b}$; $L \subset X$)



Т1 (прохождение через промежуточные значения)

Пусть f непр-на на лин. связном мн-ве X. Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in X$ $f(\vec{a}) = A$, $f(\vec{b}) = B$. Тогда $\forall \gamma \in [A, B]$ (или $[B, A]$) $\forall$ непр-й кривой $L \subset X$, соедин-ей $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\exists \vec{c} \in L : f(\vec{c}) = \gamma$

▶ Д-во: Пусть $L = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)),\ \alpha \le t \le \beta\}$; $(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) = \vec{a}$, $(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta)) = \vec{b}$; $L \subset X$.
Рассмотрим ф-цию $g(t) = f(\vec{\varphi}(t)) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$
Она непр-на на $[\alpha, \beta]$ как сложная ф-ция
$g(\alpha) = A$; $g(\beta) = B$. Значит, $\forall\, \gamma \in [A, B]$ (или $[B, A]$) найдется $t_0 \in [\alpha, \beta]$: $g(t_0) = \gamma$.
Обозначим $\vec{c} = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$; тогда $\vec{c} \in L$;
$f(\vec{c}) = \gamma$. ч.т.д. ◼

Т2 (1-я Th Вейерштрасса)

Пусть f - непр-на на замкнутом огр-ом мн-ве X, тогда f - огр-на на X

▶ Д-во: Предположим, что f не ограничена на X.
Тогда $\forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, \vec{x}^m \in X$: $|f(\vec{x}^m)| > m$.
Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ ограничена (т.к. X - ограничено); значит, $\exists$ сх-ся подпосл-ть $\vec{x}^{k_m} \to \vec{x}^0$ (теор. Б.-В.)
Точка $\vec{x}^0$ - предельная точка X; X - замкнуто $\Rightarrow$ $\vec{x}^0 \in X$. Значит, f непр-на в т. $\vec{x}^0 \Rightarrow f(\vec{x}^{k_m}) \to f(\vec{x}^0)$
Но $|f(\vec{x}^{k_m})| > k_m$, т.е. $\{f(\vec{x}^{k_m})\}$ - ББП ?!
$\Rightarrow f$ ограничена на X. ч.т.д. ◼

Т3 (2-я Th Вейерштрасса)

Пусть f - непр-на на замкнутом огр-ом мн-ве X. Тогда она достигает на X своих точных граней.

Билет 27

Опр $\exists$ мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ таково, что каждая его точка явл. предельной. Ф-ция f — равно-но непр-на на X, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \vec{x}', \vec{x}'' \in X, \rho(\vec{x}', \vec{x}'') < \delta : |f(\vec{x}') - f(\vec{x}'')| < \varepsilon$

Th1 (Кантор)

$\exists$ f — непр-на на замкнутом огр-ом мн-ве X. Тогда f — равн-но непр-на на X.

ограниченном мн-ве X.

Д-во: Предположим, что f не явл-ся р/н на $X \Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall \delta_m = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$, $\exists \vec{x}^{m\prime}, \vec{x}^{m\prime\prime} \in X$, $\rho(\vec{x}^{m\prime}, \vec{x}^{m\prime\prime}) < \frac{1}{m}$, но $|f(\vec{x}^{m\prime}) - f(\vec{x}^{m\prime\prime})| \geq \varepsilon$.

Рассм. посл-ть $\{\vec{x}^{m\prime}\}$. Она ограничена (т.к. мн-во X ограничено) $\Rightarrow$ из неё можно выделить сход-ся подпосл-ть $\vec{x}^{k_m\prime} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \vec{x}^0$. Тогда $\vec{x}^0$ - предельная точка X; мн-во X замкнуто $\Rightarrow \vec{x}^0 \in X$.
Значит, f непр-на в т. $\vec{x}^0 \Rightarrow f(\vec{x}^{k_m\prime}) \to f(\vec{x}_0)$.
Теперь рассм. посл-ть $\{\vec{x}^{k_m\prime\prime}\}$. Поскольку $\rho(\vec{x}^{k_m\prime}, \vec{x}^{k_m\prime\prime}) < \frac{1}{k_m}$, то $\vec{x}^{k_m\prime\prime} \to \vec{x}^0$. Значит, $f(\vec{x}^{k_m\prime\prime}) \to f(\vec{x}^0)$. Получили, что $(f(\vec{x}^{k_m\prime}) - f(\vec{x}^{k_m\prime\prime})) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$. Но $|f(\vec{x}^{k_m\prime}) - f(\vec{x}^{k_m\prime\prime})| \geq \varepsilon$?! $\Rightarrow f$ р/н на X.
ч.т.д.

Билет 28

Оп Ф-ия f дифф-ма в точке $\vec{x}^0$ если её полное приращение
$\Delta f = f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)$ в этой точке представимо в виде

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_n \Delta x_n \quad (1)$$

где $A_1, \ldots, A_n$ - константы; $\alpha_j = \alpha_j(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \underset{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}}{\longrightarrow} 0$

Или эквивалентно

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \bar{o}(\rho), \ \rho \to 0 \quad (2)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$

Экв-ть 2 форм записи ост-го члена

$(1) \Rightarrow (2)$ $\alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_n \Delta x_n = \overbrace{\Big(\underbrace{\alpha_1}_{\to 0} \underbrace{\frac{\Delta x_1}{\rho}}_{|\,|\le 1} + \ldots + \underbrace{\alpha_n}_{\to 0} \underbrace{\frac{\Delta x_n}{\rho}}_{|\,|\le 1} \Big)}^{\bar{o}(1),\ \rho \to 0} \rho = \bar{o}(\rho), \ \rho \to 0$

$(2) \Rightarrow (1)$ $\bar{o}(\rho) = \rho\, \bar{o}(1) =$

$= \rho \overbrace{\alpha(\rho)}^{\to 0} = \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$,

$$\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots \Delta x_n^2}$$

где $\alpha_j \underset{\rho \to 0}{\to} 0 \Leftrightarrow \alpha_j \underset{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \to 0}}{\to} 0$, $j = \overline{1,n}$

Оп] f опр-на на открытом мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^0 \in X$,
$\Delta\vec{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ (вектор приращения аргум) $\Delta x_k \in \mathbb{R}$: $\vec{x}^0 + \Delta\vec{x} \in X$

Частной производной ф-ии f в точке $\vec{x}^0$ по переменной x_k
наз-ся выражение $f'_{x_k}(\vec{x}^0) := \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_k}$

$k = \overline{1,n}$. Другое обозначение $\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\vec{x} = \vec{x}^0}$

Th1 (Необходимое усл-ие дифф-ти)

$\exists$ f дифф-ма в т. $\vec{x}^0$. Тогда в этой т. $\exists$ все её частные производные, причем $f'_{x_k}(\vec{x}^0) = A_k$, $k = \overline{1,n}$

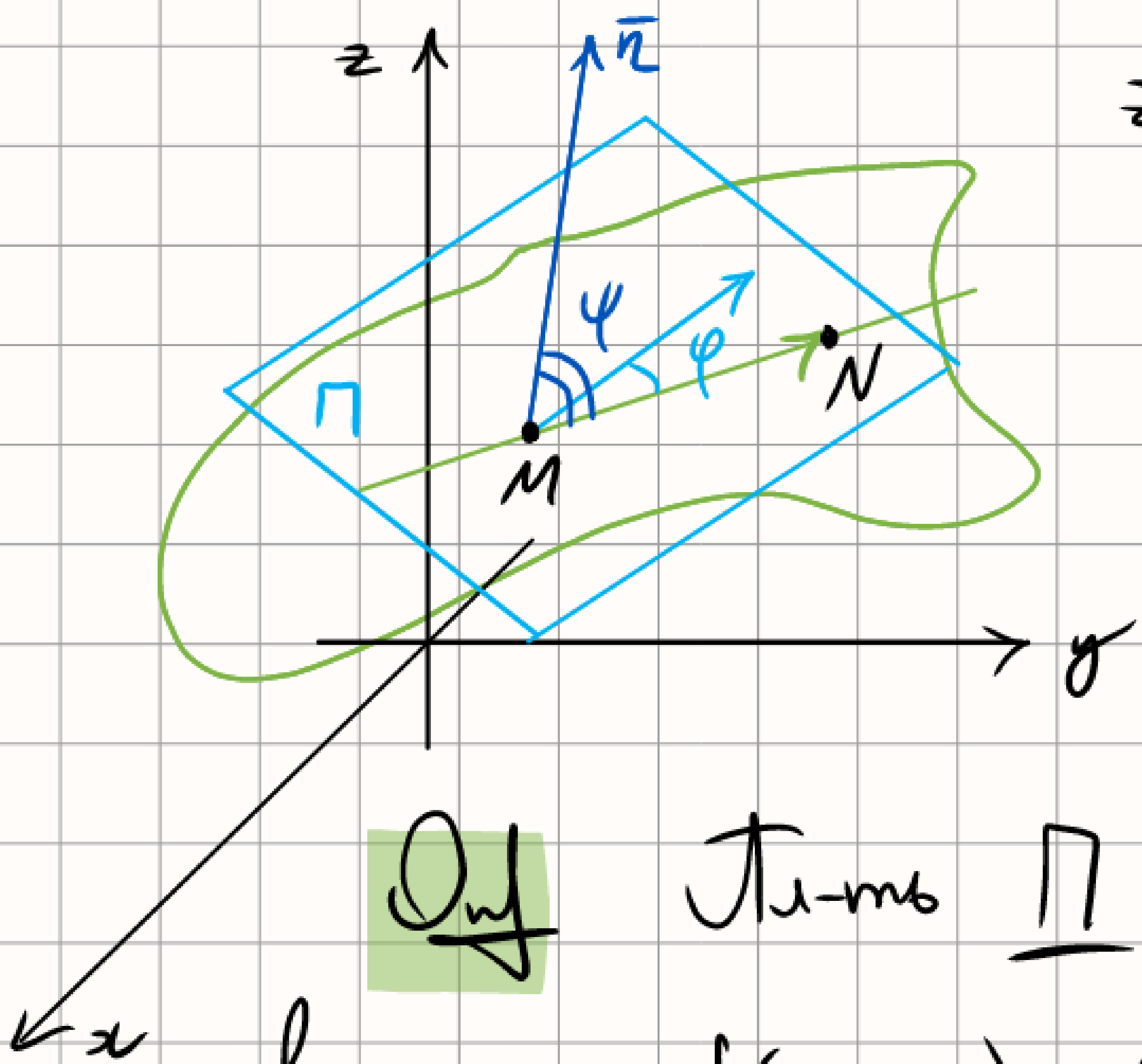
▶ **Д-во:** Положим в ф-ле (1): $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \ldots = \Delta x_n = 0$, $\Delta x_k \neq 0$. Тогда

$$\Delta_k f = A_k \Delta x_k + \alpha_k(0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0) \cdot \Delta x_k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k}}_{f'_{x_k}(\vec{x}^0)} = A_k + \underbrace{\lim_{\Delta x_k \to 0} \alpha_k}_{=0}$$

ч.т.д. ■

Геометрический смысл дифф-ти



$z = f(x, y)$ Её график – поверхность

$\exists$ $M(x_0, y_0, z_0)$, $N(x, y, z)$ лежат на пов-ти (т.е. $z_0 = f(x_0, y_0)$, $z = f(x, y)$)

Опр Пл-ть Π наз **касательной плоскостью** к пов-ти $z = f(x_0, y_0)$ в т. M, если $M \in \Pi$ и угол между Π и $\overrightarrow{MN} \to 0$ при $N \to M$

Утв1 Если f – дифф-ма в т. M, то в этой точке $\exists$ кас. пл-ть Π: $A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0) = 0$, где

$A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$

▶ **Д-во:** Рассм. не угол φ между $\overrightarrow{MN}$ и Π, а угол ψ между $\overrightarrow{MN}$ и $\vec{n} = \{A, B, -1\}$ – нормаль Π.

$\varphi \to 0 \Leftrightarrow \psi \to \frac{\pi}{2}$. Действ-но, $|\cos\psi| = \frac{|(\overrightarrow{MN}, \vec{n})|}{\|\overrightarrow{MN}\| \cdot \|\vec{n}\|} =$

$$= \frac{|\underbrace{(z - z_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}_{=\bar{o}(\rho) \text{ в силу дифф-ти } f}|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \leq \frac{|\bar{o}(\rho)|}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

ч.т.д. ■

Билет 29

Билет 28 +

Т2 (достаточное ус-ие дифф-ти)

$\exists$ все частные пр-ые ф-ии f $\exists$ в окр-ти т $\vec{x}^0$ и непр-вы в т. $\vec{x}^0$

Тогда f дифф-ма в т. $\vec{x}^0$.

▶ **Д-во:** $\Delta f = f(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) =$

$= \big(f(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_{n-1}^0+\Delta x_{n-1}, x_n^0)\big) +$

$+ \big(f(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_{n-1}^0+\Delta x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_{n-2}^0+\Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)\big) +$

$+ \ldots + \big(f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)\big) =$

$= f'_{x_n}(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_{n-1}^0+\Delta x_{n-1}, x_n^0+\theta_n \Delta x_n) \cdot \Delta x_n +$

т. Лагранжа, $\theta_1, \ldots, \theta_n \in (0,1)$

$+ f'_{x_{n-1}}(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_{n-2}^0+\Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0+\theta_{n-1}\Delta x_{n-1}, x_n^0)\Delta x_{n-1}$

$+ \ldots + f'_{x_1}(x_1^0+\theta_1 \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \cdot \Delta x_1 = \big(f'_{x_n}(\vec{x}^0) + \alpha_n(\vec{\Delta x})\big) \cdot$

$\cdot \Delta x_n + \big(f'_{x_{n-1}}(\vec{x}^0) + \alpha_{n-1}(\vec{\Delta x})\big)\Delta x_{n-1} + \ldots + \big(f'_{x_1}(\vec{x}^0) + \alpha_1(\vec{\Delta x})\big)\Delta x_1,$

где $\alpha_j(\vec{\Delta x}) \underset{\vec{\Delta x} \to 0}{\to} 0$, $j = 1, \ldots, n$ $\Rightarrow$ f дифф-ма в т. $\vec{x}^0$.

ч.т.д.

Замеч-е Усл-е непр-ти ЧП не явл-ся необходимым усл-ем дифф-ти. **Например,** $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ дифф-ма в $(0,0)$, но ЧП разрывны ◀

Билет 30

Опр Дифф-ал (первый) ф-ии f в т. $\vec{x}^0$, соотв-й вектору приращений $\vec{\Delta x}$, наз. выражение

$$df\big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \underbrace{A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n}_{\text{главная лин. часть приращ-ия}}$$

Th1 (дифф-ть сложной ф-ии)

$\exists\ \varphi_j : T(\subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$, $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = \varphi_j(\vec{t}),\ \vec{t} \in T\}$

$f : X \to Y \subset \mathbb{R}$. Если все ф-ии φ_j дифф-мы в т. $\vec{t}^{\,0} \in T$, а ф-ия f дифф-ма в т. $\vec{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, где $x_j^0 := \varphi_j(\vec{t}^{\,0})$, $j = \overline{1,n}$, то сложная ф-ия $f(\vec{\varphi})$ дифф-ма в т. $\vec{t}^{\,0} = (t_1^0, \ldots, t_k^0)$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial t_i}\Big|_{\vec{t}^0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\vec{x}^0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}\Big|_{\vec{t}^0} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\vec{x}^0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}\Big|_{\vec{t}^0}, \quad i = \overline{1,k}$$

▶

$$(1)\quad \frac{\partial f}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}^0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}^0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}^0} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\bar{x}^0} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}^0}, \quad i = 1, \ldots, k$$

Д-во: $(*)\ \Delta f = f(\bar{\varphi}(\bar{t})) - f(\bar{\varphi}(\bar{t}^0)) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}^0) =$

$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}^0} \cdot \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\bar{x}^0} \cdot \Delta x_n + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot \Delta x_n,$

где $\alpha_j \xrightarrow[\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0]{} 0$.

Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$ $(**)\ \Delta x_j = \Delta \varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}\Big|_{\bar{t}^0} \cdot \Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}\Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_k +$

$+ \bar{o}(\rho)$, $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \ldots + \Delta t_k^2}$.

Подставим выражения $(**)$ в представление $(*)$:

$$\Delta f(\bar{\varphi}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}^0} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_i + \bar{o}(\rho) \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_i + \bar{o}(\rho) \right) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}^0} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}^0} \cdot \Delta t_i}_{} + R,$$

где $R = \underbrace{\bar{o}(\rho) \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}^0} + \alpha_j \right) \right)}_{\text{ограничена}}}_{= \bar{o}(\rho)\ =: R_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}^0} \cdot \Delta t_i \right) \cdot \alpha_j}_{=: R_2}$;

$$R_2 = \rho \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}^0}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta t_i}{\rho}}_{|\,| \le 1}}_{\text{ограничена}} \cdot \alpha_j$$

$\alpha_j \xrightarrow[\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}]{} 0$, но $\Delta x_j \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$, т.к. φ_j - дифф-ма $\Rightarrow$ непр-на

$\Rightarrow \alpha_j \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$

$\Rightarrow R_2 = \bar{o}(\rho) \Rightarrow R = \bar{o}(\rho)$, $\rho \to 0 \Rightarrow$

$\Delta f(\bar{\varphi}) = A_1 \Delta t_1 + \ldots + A_k \Delta t_k + \bar{o}(\rho)$, где $A_1, \ldots, A_k$ вычисляются по ф-ле (1)

ч.т.д. ■

Следствие (инвариантность формы 1 дифф-ла)

Первый дифф-ал (дифф-ой) ф-ии $f(x_1,\dots,x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$, независимо $x_1,\dots,x_n$ - незовис-е переменные или ф-ии $x_j = \varphi_j(t_1,\dots,t_k)$

▶

$$(1)\ \frac{\partial f}{\partial t_i}\Big|_{\bar t^0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar x^0}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}\Big|_{\bar t^0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\bar x^0}\cdot\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}\Big|_{\bar t^0},\quad i=1,\dots,k$$

Д-во: $(*)\ \Delta f = f(\bar\varphi(\bar t)) - f(\bar\varphi(\bar t^0)) = f(\bar x) - f(\bar x^0) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar x^0}\cdot\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\bar x^0}\cdot\Delta x_n + \alpha_1\cdot\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\cdot\Delta x_n,$$

где $\alpha_j \xrightarrow[\Delta x_1\to 0,\dots,\Delta x_n\to 0]{} 0$.

Пусть $j\in\{1,\dots,n\}$ $(**)\ \Delta x_j = \Delta\varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}\Big|_{\bar t^0}\cdot\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}\Big|_{\bar t^0}\Delta t_k + \bar o(\rho)$, $\rho\to 0$, где $\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \dots + \Delta t_k^2}$.

Подставим выражение $(**)$ в представление $(*)$:

$$\Delta f(\bar\varphi) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\bar x^0}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\Big|_{\bar t^0}\Delta t_i + \bar o(\rho)\right) +$$

$$df = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial t_i}\cdot\Delta t_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\cdot\Delta t_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\Delta t_i\right)}_{= dx_j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j \Rightarrow \text{верно (2).}$$

ч.т.д.

◼

Следствие 2 (п...

Билет 31

Опр Производной ф-ии f в точке $\vec{x}^0$ по направлению заданному вектором $\vec{e}$, наз-ся выражение $\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_{M_0} := g'(0)$

$$g(t) = f(x_1^0 + t\cos\alpha_1, \ldots, x + t\cos\alpha_n)$$

Формула для вычисления про-ой по напр-ию ф-ии

$$\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_A = f'_x(A)\cos\alpha + f'_y(A)\sin\alpha$$

Опр Градиентом дифф-ой в т $\vec{x}^0$ ф-ии f наз. вектор

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f\Big|_{\vec{x}^0} = \vec{\nabla} f\Big|_{\vec{x}^0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\vec{x}^0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\vec{x}^0}\right)$$

Утв-ие (Геометрический смысл градиента)

Градиент в данной точке показывает направление максимального роста ф-ии; скорость этого роста равна модулю градиента.

Д-во: Пусть $n=3$: $\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_{M_0} = (\overrightarrow{\text{grad}} f, \vec{e}) =$

$= |\overrightarrow{\text{grad}} f| \cdot \underbrace{|\vec{e}|}_{=1} \cdot \cos\varphi \leq |\overrightarrow{\text{grad}} f|$,

φ-угол между $\overrightarrow{\text{grad}} f$ и $\vec{e}$.

причем равенство достиг-ие, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. $\overrightarrow{\text{grad}} f \uparrow\uparrow \vec{e}$.

нер-во Коши-Буняковского

$(\overrightarrow{\text{grad}} f, \vec{e}) \leq \|\overrightarrow{\text{grad}} f\| \cdot \|\vec{e}\|$ ч.т.д.

Билет 32

Опр Пусть ф-ия f опр-на в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и имеет в этой области ЧП $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Если в точке $\vec{x}^0 \in D$ ф-ия $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ имеет ЧП по переменной x_e, то $\exists$ число $\left.\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right|_{\vec{x}^0}$

Выражение $\frac{\partial^2 f}{\partial x_e \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ наз. второй ЧП ф-ии f (ЧП 2-го порядка)

Опр Ф-ия f наз. дважды дифф-ой в т. $\vec{x}^0$, если она дифф-ма в нек-ой окрестности точки $\vec{x}^0$ и все её ЧП 1-го порядка дифф-мы в т. $\vec{x}^0$. Аналогично f m раз диф-ма в т. $\vec{x}^0$, если она $m-1$ раз дифф-ма в окр-ти и все её ЧП порядка $m-1$ дифф-мы в $\vec{x}^0$ $(m \geq 2)$

Th1 (Юнг)

Если $f(x,y)$ 2-ды дифф-ма в т. (x_0,y_0), то

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$$

Д-во: ЧП f'_x и f'_y сущ-т в нек-рой окр-ти т. (x_0,y_0) и дифф-мы в точке. $\exists h \in \mathbb{R}$, т.ч. $(x_0+h, y_0+h) \in$ этой окр-ти

Обозначим $\varphi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$.

Тогда $\Delta\varphi = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) -$
$- f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)$ (*)

С др. стороны, $\Delta\varphi \underset{\text{т. Лагранжа, } 0<\theta<1}{=} \varphi'(x_0+\theta h)\cdot h = (f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) -$

$g(x_0+\theta h, y_0+h) - g(x_0, y_0) = g'_x\cdot\theta h + g'_y\cdot h + \bar{o}(h)$

$- f'_x(x_0+\theta h, y_0))\cdot h = (f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) - f'_x(x_0,y_0))\cdot h -$
$- (f'_x(x_0+\theta h, y_0) - f'_x(x_0,y_0))\cdot h \underset{\text{опр. дифф-ти } f'_x \text{ в т. } (x_0,y_0)}{=} (\cancel{f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot\theta h} +$

$\bar{o}\left(\sqrt{\theta^2h^2+h^2}\right) = \bar{o}(h)$

$+ f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot h + \bar{o}(h))\cdot h - (\cancel{f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot\theta h} + f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot 0 + \bar{o}(h))h$
$= f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot h^2 + \bar{o}(h^2)$

Тогда $\Delta\varphi = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) -$
$- f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)$ (*)

С др. стороны, $\underset{\text{т. Лагранжа}, 0<\theta<1}{\Delta\varphi =} \varphi'(x_0+\theta h)\cdot h = (f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) -$

$g(x_0+\theta h, y_0+h) - g(x_0, y_0) = g'_x\cdot\theta h + g'_y\cdot h + \bar{o}(h)$

$- f'_x(x_0+\theta h, y_0))\cdot h = (f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) - f'_x(x_0, y_0))\cdot h -$
$- (f'_x(x_0+\theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0))\cdot h \underset{\text{опр. дифф-ти } f'_x \text{ в т. } (x_0, y_0)}{=} (\cancel{f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot\theta h} +$

$\bar{o}(\sqrt{\theta^2h^2+h^2}) = \bar{o}(h)$

$+ f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot h + \bar{o}(h))\cdot h - (\cancel{f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot\theta h} + f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot 0 + \bar{o}(h))h$
$= f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot h^2 + \bar{o}(h^2)$ ■

Th2 (Шварц)

Пусть ф-ия f имеет в нек-ой окр-ти т. (x_0, y_0) ЧП $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$, причем f''_{xy}, f''_{yx} непр-ны в т. (x_0, y_0). Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

▶ Д-во: Введем ф-ции φ и ψ аналогично т. 1; $h \in \mathbb{R}$, т.ч. $(x_0+h, y_0+h) \in$ окр-ти, в к-рой сущ-т ЧП.
Тогда $\Delta\varphi = \Delta\psi$. С др. стороны,
$\underset{\text{как в т. 1}}{\Delta\varphi =} (f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) - f'_x(x_0+\theta h, y_0))\cdot h \underset{\text{т. Лагранжа по } y \text{ на } [y_0, y_0+h], 0<\tilde{\theta}<1}{=} f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\tilde{\theta}h)\cdot h^2$
$= \underbrace{(f''_{xy}(x_0, y_0) + \bar{o}(1))}_{\text{в силу непр-ти } f''_{xy} \text{ в т. } (x_0, y_0)}\cdot h^2$. Далее как в т. 1 и т.д. ■

Билет 33

Def Пусть ф-ия f дифф-ма в области D, тогда $\forall \vec{x} \in D$
$$df\big|_{\vec{x}} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Положим $\Delta x_1 = h_1, \ldots, x_n = h_n \Rightarrow df$ — ф-ия переменной $\vec{x}$.

Если в нек-ой точке $\vec{x}^0 \in D$ ф-ия f дважды дифф-ма, то её ЧП порядка 1 дифф-мы $\Rightarrow$ ф-ия df дифф-ма в т. $\vec{x}^0$. Тогда можем написать $d(df)\big|_{x_0} = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)\Big|_{\vec{x}^0} =$

$$= h_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\Big|_{\vec{x}^0} + \ldots + h_n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{\vec{x}^0} = h_1\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\Big|_{\vec{x}^0}\Delta x_k\right) + \ldots + h_n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{\vec{x}^0}\Delta x_k\right)$$

Положим $\Delta x_j = h_j = dx_j$, получим

$$d^2 f\big|_{\vec{x}^0} := d(df)\big|_{\vec{x}^0} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x}^0)}{\partial x_k \partial x_j}\, dx_k\, dx_j \text{ — }$$

Второй дифференциал

Th 1 (ф-ла Тейлора с ост. членом в форме Лагранжа)

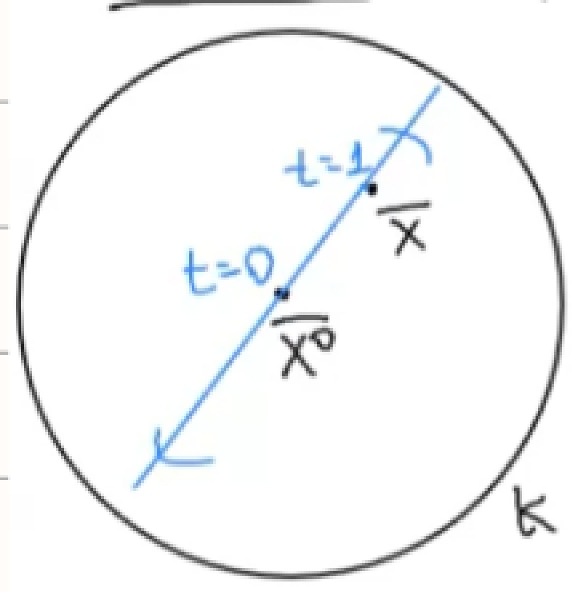
$\exists$ ф-ия f $(m+1)$ раз дифф-ма в $B_\delta(\vec{x}^0)$, $\delta > 0$, $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

Тогда $\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}^0)$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{1}{1!} df\big|_{\vec{x}^0} + \frac{1}{2} d^2 f\big|_{\vec{x}^0} + \ldots + \frac{1}{m!} d^m f\big|_{\vec{x}^0} + R_m(\vec{x}),$$

где $R_m(\vec{x}) = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f\big|_{\vec{x}^0}$, все дифф-лы соот-т вектору приращения $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}^0$; $\vec{x}' = \vec{x}^0 + \theta\Delta\vec{x}$, $\theta \in (0,1)$

▶ Д-во: Пусть $\bar{x} \in B_\delta(\bar{x}^0)$. Рассмотрим ф-цию $g(t) = f(\bar{x}^0 + t\Delta\bar{x}) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + t\Delta x_n)$; $\Delta x_k = x_k - x_k^0$.



Она определена и $(m+1)$ раз диф-ма в нек-рой окр-ти точки $t=0$, причем $t=1$ принадлежит этой окр-ти. Применим к ф-ции g теорему о разл. по ф-ле Тейлора с ост. Лагранжа:

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \frac{g''(0)}{2!} + \ldots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}, \quad 0 < \theta < 1$$

(т.к. $t - t_0 = 1 - 0 = 1$)

Заметим, что $g(0) = f(\bar{x}^0)$;

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}^0}\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\bar{x}^0}\cdot\Delta x_n = df\big|_{\bar{x}^0}; \quad = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\bar{x}^0}\cdot\Delta x_k$$

$$g''(0) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\Big|_{\bar{x}^0}\cdot\Delta x_k\cdot\Delta x_j = d^2 f\big|_{\bar{x}^0};$$

$$g^{(m)}(0) = d^m f\big|_{\bar{x}^0}; \quad g^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f\big|_{\bar{x}^0 + \theta\Delta\bar{x}}.$$

Подставляем в формулу для разл-я $g(1) = f(\bar{x}^0 + \Delta\bar{x}) = f(\bar{x})$; получаем утв-е теоремы. ч.т.д.

$$g'(t) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n; \quad \bar{x} = (x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + t\Delta x_n)$$ ■

Билет 34

Th (ф-ла Тейлора с ост. членом в форме Пеано)

$\exists$ ф-ия f $(m-1)$ дифф-ма в $B_\delta(\vec{x^0})$ и m раз в т. $\vec{x^0}$

Тогда $\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x^0})$ $f(\vec{x}) = f(\vec{x^0}) + \frac{1}{1!} df\big|_{\vec{x^0}} + \ldots + \frac{1}{m!} d^m f\big|_{\vec{x^0}} + \bar{o}(\rho^m), \rho \to 0$

где $\rho = \|\Delta\vec{x}\| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$

▶ Д-во: Обозначим $g_m(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \left(f(\bar{x^0}) + \frac{1}{1!} df|_{\bar{x^0}} + \ldots + \frac{1}{m!} d^m f|_{\bar{x^0}}\right)$. Нужно д-ть, что $g_m(\bar{x}) = \bar{o}(\rho^m)$, $\rho \to 0$.

Лемма 1 Если ф-ция f m раз дифф-ма в т. $\bar{x^0}$ то все ЧП ф-ции g_m до порядка m включительно обращаются в 0 в точке $\bar{x^0}$ (нулевая ЧП - это сама ф-ция)

Д-во: (индукция по m).

$m=1$: $g_1(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x^0}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x^0}} (x_1 - x_1^0) - \ldots \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\bar{x^0}} (x_k - x_k^0) \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\bar{x^0}} (x_n - x_n^0)$

$\Rightarrow g_1(\bar{x^0}) = 0$; $\frac{\partial g_1}{\partial x_k}\Big|_{\bar{x^0}} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\bar{x^0}} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\bar{x^0}} = 0$. $\forall k = 1, \ldots, n$

Пусть верно для m; док-м для $m+1$: ф-ция f $(m+1)$ раз дифф-ма в т. $\bar{x^0}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ все ЧП ф-ции g_{m+1} обр. в 0 в т. $\bar{x^0}$

$g_{m+1}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x^0}) - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j!} d^j f\big|_{\bar{x^0}}$

$g_{m+1}(\bar{x^0}) = 0$ (т.к. $x_k - x_k^0 = 0$ при $x_k = x_k^0$)

Возьмем $l \in \{1, \ldots, n\}$. Рассм. ф-цию $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}$. Нужно док-ть, что все её ЧП до пор-ка m $=0$ в точке $\bar{x^0}$

Для этого док-м, что $\frac{\partial g_{m+1}(\bar{x})}{\partial x_l} = \tilde{f}(\bar{x}) - \left(\tilde{f}(\bar{x^0}) + \frac{1}{1!} d\tilde{f}\big|_{\bar{x^0}} + \ldots + \frac{1}{m!} d^m \tilde{f}\big|_{\bar{x^0}}\right)$, где $\tilde{f}$ - нек-рая ф-ция

$$\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}\Big|_{\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(f(\bar{x}) - f(\bar{x^0}) - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j!} d^j f\big|_{\bar{x^0}}\right) =$$

$$= \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_j=1}^{n} \frac{\partial^j f(\bar{x^0})}{\partial x_{k_j} \ldots \partial x_{k_1}} (x_{k_1} - x_{k_1}^0) \ldots (x_{k_j} - x_{k_j}^0)\right)$$

$$= \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j!} \cdot j \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_{j-1}=1}^{n} \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_{k_{j-1}} \ldots \partial x_{k_1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)\Big|_{\bar{x^0}} \cdot (x_{k_1} - x_{k_1}^0) \ldots (x_{k_{j-1}} - x_{k_{j-1}}^0) \cancel{(x_l - x_l^0)}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_l}}_{=\tilde{f}(\bar{x})} - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{(j-1)!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_{j-1}=1}^{n} \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_{k_{j-1}} \ldots \partial x_{k_1}} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)}_{\tilde{f}(\bar{x})}\Big|_{\bar{x^0}} dx_{k_1} \ldots dx_{k_{j-1}} = \tilde{f}(x) - \underbrace{\tilde{f}(\bar{x^0})}_{\text{слагаемое при } j=1 \Leftrightarrow s=0} - $$

$j-1 = s$

$$-\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}\underbrace{\sum_{k_1=1}^{n}\dots\sum_{k_s=1}^{n}\frac{\partial^s}{\partial x_{k_s}\dots\partial x_{k_1}}\tilde{f}\Big|_{\bar{x}^0}dx_{k_1}\dots dx_{k_s}}_{=d^s\tilde{f}|_{\bar{x}^0}} =$$

$$= \tilde{f}(\bar{x})-\tilde{f}(\bar{x}^0)-\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}d^s\tilde{f}\Big|_{\bar{x}^0}.$$

Итак, $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_e}(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{x})-\tilde{f}(\bar{x}^0)-\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}d^s\tilde{f}|_{\bar{x}^0}$, где $\tilde{f}=\frac{\partial f}{\partial x_e}$ — m раз дифф-ма в т. $\bar{x}^0$. Значит, по предп-ю индукции $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_e}$ в точке $\bar{x}^0$ обр-ся в 0 вместе со всеми ЧП до пор-ка m включительно. Число l произвольное $\Rightarrow$ все ЧП ф-ции g_{m+1} до пор-ка $m+1$ обр-ся в 0 в точке $\bar{x}^0$. ч.т.д. ■

Билет 35

Оп Пусть ф-ия f опр-на в нек-ой окр-ти т. $\vec{x}^0$.

Точка $\vec{x}^0$ наз-ся точкой (строгого) локального max [min] ф-ии f, если $\exists\,\delta>0$, т.ч. $f(\vec{x}) < f(\vec{x}^0)\ [> f(\vec{x}^0)]\ \forall \vec{x}\in B_\delta(\vec{x}^0)$

Т1 (Необходимые условия экстр-а)

Пусть $\vec{x}^0$ — точка лок. экстр. ф-ии. Если $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\vec{x}^0}$, то $\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\vec{x}^0}=0$. В частности, если f-дифф-ма в точке экст-а, то $df\big|_{\vec{x}^0}\equiv 0$.

▶ Д-во: Положим $x_1=x_1^0,\dots,x_{j-1}=x_{j-1}^0,\ x_{j+1}=x_{j+1}^0,\dots,x_n=x_n^0$; рассм. ф-цию $g(x_j)=f(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0,x_j,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0)$. Если f имеет extr в точке $\bar{x}^0$, то g имеет extr в точке $x_j^0 \Rightarrow g'(x_j^0)=0$ (т. Ферма). ч.т.д. ■

Оп Если $\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\vec{x}^0}=0$, $j=1,\dots,n$ то точка $\vec{x}^0$ наз-ся стационарной точкой ф-ии f

Оп Будем говорить, что $d^2f\big|_{\vec{x}^0}>0\ [<0]$ (положит. [отриц.]) определ., если она принимает положит. [отриц.] значения $\forall$ набора $dx_1,\dots,dx_n$: $(dx_1)^2+\dots+(dx_n)^2\neq 0$

Th2 (достаточное усл-ие экстр.)

] ф-ия f опр-на и дважды дифф-ма в точке $\vec{x}^0$

1) Если $df|_{\vec{x}^0}=0$, $d^2f|_{\vec{x}^0}>0\ [<0]$, то $\vec{x}^0$ – точка max[min]

2) Если $df|_{\vec{x}^0}=0$, $d^2f|_{\vec{x}^0}$ – знакопеременная, то extr $\nexists$

▶ Д-во: Из теор. о разл-и f по ф-ле Тейлора с ост. Пеано:

$$f(\bar{x})-f(\bar{x}^0)=\frac{1}{1!}\underbrace{df|_{\bar{x}^0}}_{=0}+\frac{1}{2!}d^2f(\bar{x}^0)+\bar{o}(\rho^2)\overset{(=)}{=},\ \rho\to 0$$

$$\overset{(=)}{=}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{\bar{x}^0}}_{=a_{kj}}(x_k-x_k^0)(x_j-x_j^0)+\bar{o}(\rho^2)=$$

$$=\frac{\rho^2}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}h_kh_j+\underset{\rho\to0}{\bar{o}(1)}\Big),\quad \text{где } h_k=\frac{x_k-x_k^0}{\rho},\ |h_k|\le 1.$$

Пусть $\bar{h}=(h_1,\dots,h_n)$, тогда $\|\bar{h}\|=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^0)^2}{\rho^2}=1$.

1) Пусть $d^2f|_{\bar{x}^0}>0$ (случай <0 – аналогично). Тогда $A(h_1,\dots,h_n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}h_kh_j>0$. Ф-ция $A(\bar{h})$ опр-на и непрерывна на единичной сфере $\underbrace{S_1(0)}_{\text{замкнутое, ограниченное мн-во}}$ $\Rightarrow$

$\overset{(\Rightarrow)}{}$ достигает там своего inf, т.е. $\exists\,\bar{h}'\in S_1(0)$, т.ч.
$\underset{\forall \bar{h}\in S_1(0)}{A(\bar{h})}\ge \overset{>0}{A(\bar{h}')}=\inf\limits_{\bar{h}\in S_1(0)}A(\bar{h})=\mu>0$.

Тогда $f(\bar{x})-f(\bar{x}^0)=\frac{\rho^2}{2}\Big(\underbrace{A(\bar{h})}_{\ge\mu>0}+\underset{\rho\to0}{\bar{o}(1)}\Big)$. Значит, $\exists\,\delta>0$, т.ч. $\forall\rho\in(0,\delta)$: $|o(1)|<\mu/2$ $\Rightarrow$
$\forall\,\bar{x}\in\mathring{B}_\delta(\bar{x}^0)$: $f(\bar{x})-f(\bar{x}^0)\ge\frac{\rho^2}{2}\cdot\mu/2>0\Rightarrow f(\bar{x}^0)<f(\bar{x})\Rightarrow$ $\bar{x}^0$ – точка min.

2) Пусть теперь $d^2f|_{\bar{x}^0}$ – знакопеременная КФ $\Rightarrow$ $A(\bar{h})$ – знакопеременная КФ $\Rightarrow$

$\exists\,\bar{h}'=(h_1',\dots,h_n')$ и $\bar{h}''=(h_1'',\dots,h_n'')\in S_1(0)$, т.ч. $A(\bar{h}')<0$, $A(\bar{h}'')>0$. Тогда $\forall\rho>0$ рассм. точки $\bar{x}'=\bar{x}^0+\rho\cdot\bar{h}'$, $\bar{x}''=\bar{x}^0+\rho\cdot\bar{h}''$ (тогда $\rho(\bar{x}',\bar{x}^0)=\|\rho\bar{h}'\|=\rho$; $\rho(\bar{x}'',\bar{x}^0)=\|\rho\bar{h}''\|=\rho$) $\Rightarrow$

$f(\bar{x}')-f(\bar{x}^0)=\frac{\rho^2}{2}\Big(\underbrace{A(\bar{h}')}_{=\mu_1<0}+\underbrace{\bar{o}(1)}_{\alpha_1(\rho)}\Big)\Rightarrow\exists\,\delta_1>0$, т.ч. $\forall\rho\in(0,\delta_1)$: $|\alpha_1(\rho)|<\mu_1/2$

$\Rightarrow\forall\rho<\delta_1$ $\bar{x}'\in\mathring{B}_{\delta_1}(\bar{x}^0)$: $f(\bar{x}')-f(\bar{x}^0)<0$
Аналогично $\exists\,\delta_2>0$, т.ч. $\bar{x}''\in\mathring{B}_{\delta_2}(\bar{x}^0)$: $f(\bar{x}'')-f(\bar{x}^0)>0$
$\Big\}$ $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)\Rightarrow$ $\bar{x}',\bar{x}''\in B_\delta(\bar{x}^0)$ ч.т.д. ◼

Билет 36

Т. (о неявной ф-ии)

∃ ф-ия $F(x_1, \dots, x_n, y)$

1) опр-на и дифф-ма в нек-ой окрестности т. $\vec{x}^{0\prime} = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$

2) $F(\vec{x}^{0\prime}) = 0$

3) $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{\vec{x}^{0\prime}} \neq 0$

4) $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непр-на в точке $\vec{x}^{0\prime}$

Тогда $\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч.

$\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}^0)$ (где $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$) ∃! ф-ия $y = f(\vec{x})$,

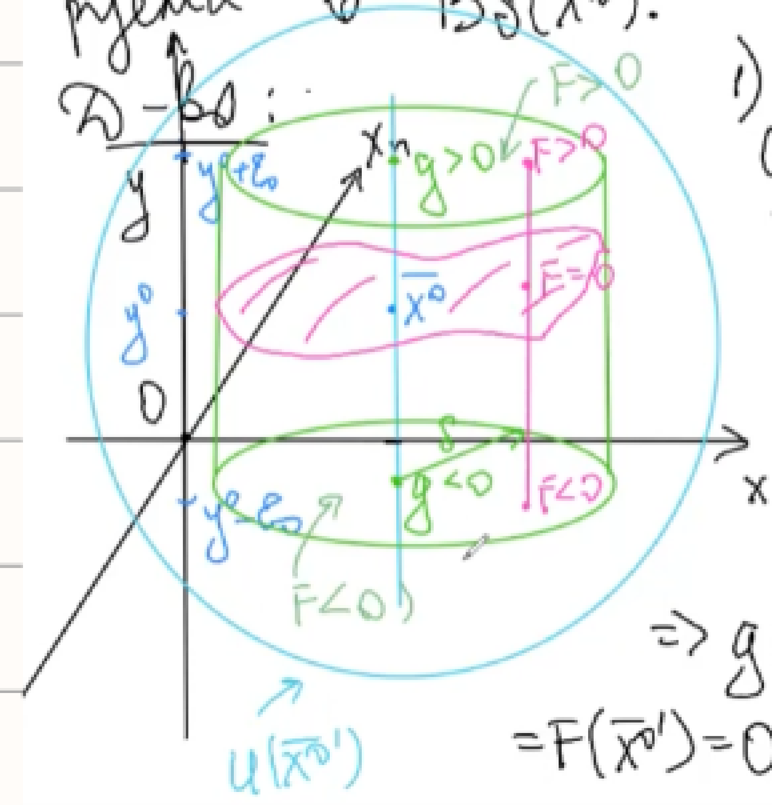
удов-я усл-ям: $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0\ \ \forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}^0)$ и $|f(\vec{x}) - y^0| < \varepsilon$

При этом ф-ия f непр и дифф-ма в $B_\delta(\vec{x}^0)$

▶

рема в $B_\delta(\bar{x}^0)$.

Д-во:



1) сущ-е и единств-ть. Пусть $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{\bar{x}^{0\prime}} > 0$ (случай < 0 – аналогично).

Т.к. $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непр. в точке $\bar{x}^{0\prime}$, то $\exists\, U(\bar{x}^{0\prime})$ – окр-ть точки $\bar{x}^{0\prime}$, т.ч. F диф-ма и $\dfrac{\partial F}{\partial y} > 0$ всюду в $U(\bar{x}^{0\prime})$.

Рассм. ф-цию $g(y) = F(\bar{x}^0, y)$

$\exists\, \varepsilon_0 > 0$, т.ч. $g'(y) > 0\ \forall y \in (y^0 - \varepsilon_0, y^0 + \varepsilon_0)$

$\Rightarrow g(y)$ возр-т на этом интервале, $g(y^0) = F(\bar{x}^{0\prime}) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : g(y^0 - \varepsilon) < 0;\ g(y^0 + \varepsilon) > 0$

ф-ция $F(\bar{x}, y^0 - \varepsilon)$ непр-на в нек-рой окр-ти т. $\bar{x}^0 \Rightarrow$

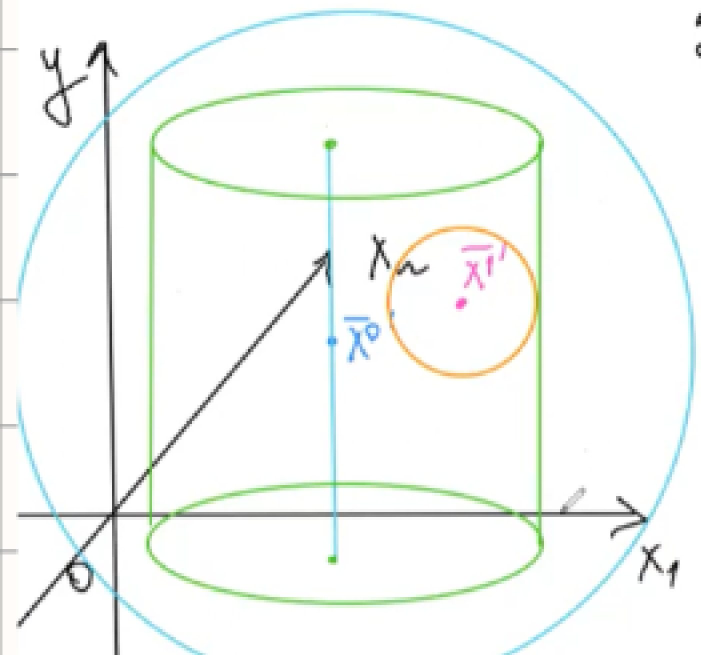
$\Rightarrow \exists\, \delta_1(\varepsilon) > 0$, т.ч. $F(\bar{x}, y^0 - \varepsilon) < 0\ \ \forall \bar{x} \in B_{\delta_1}(\bar{x}^0)$

Аналогично $\exists\, \delta_2(\varepsilon) > 0$, т.ч. $F(\bar{x}, y^0 + \varepsilon) > 0\ \ \forall \bar{x} \in B_{\delta_2}(\bar{x}^0)$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Возьмем произвольную точку $\bar{x}^1 \in B_\delta(\bar{x}^0)$ и рассм. ф-цию $g_1(y) = F(\bar{x}^1, y)$. Для нее $g_1(y^0 - \varepsilon) < 0$, $g_1(y^0 + \varepsilon) > 0$, $g_1'(y) > 0 \Rightarrow g_1 \uparrow \Rightarrow \exists!\, y^1 \in (y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon)$, т.ч. $g_1(y^1) = 0 \Leftrightarrow F(\bar{x}^1, y^1) = 0$. При этом $|y^1 - y^0| < \varepsilon$

Можем сказать, что $y^1 = f(\bar{x}^1)$.



2) непрерывность. Док-м, что построенная ф-ция f непрерывна в $B_\delta(\bar{x}^0)$. Пусть $\bar{x}^1 \in B_\delta(\bar{x}^0)$.

Обозначим $\bar{x}^{1\prime} = (x_1^1, \dots, x_n^1, y^1)$, где $y^1 = f(\bar{x}^1)$. Заметим, что в нек-рой окр-ти точки $\bar{x}^{1\prime}$ выполнены все условия теоремы:

F определена и диф-ма; $F(\bar{x}^{1\prime}) = 0$; $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{\bar{x}^{1\prime}} \neq 0$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ в указанной окрестности

$\Rightarrow$ можем провести рассуждения пункта 1) для точки $\bar{x}^{1\prime}$ вместо $\bar{x}^{0\prime}$.

Построим ф-цию $f_1(\bar{x})$, т.ч. она явл-ся реш-ем ур-я $F(\bar{x}, y) = 0$ в нек-рой δ_1-окрестности точки $\bar{x}^1$, при этом $|f_1(\bar{x}) - y^1| < \varepsilon_1\ \ \forall \bar{x} \in B_{\delta_1}(\bar{x}^1)$

($\forall \varepsilon_1$ – дост. маленького $\exists\, \delta_1(\varepsilon_1) > 0$).

Но в силу единств-ти: $f_1(\bar{x}) = f(\bar{x})\ \ \forall \bar{x} \in B_{\delta_1}(\bar{x}^1)$.

Получим, что $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists\, \delta_1(\varepsilon_1) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in B_{\delta_1}(\bar{x}^1)$:

$|f(\bar{x}) - \underset{f(\bar{x}^1)}{\underbrace{y^1}}| < \varepsilon_1$. Это опр-е непр-ти ф-ции f в точке $\bar{x}^1$. $\bar{x}^1$ – любая из $B_\delta(\bar{x}^0) \Rightarrow$ f непр. всюду в окрестности.

Заметим, что $\Delta y \underset{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0}}{\longrightarrow} 0$ в силу непр-и ф-ции f в точке $\overline{x}^1$

$\Rightarrow \alpha_j, \alpha \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_n \to 0$.

Выразим из последнего соотн-я Δy:

$$0 = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n + A \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n + \alpha \cdot \Delta y$$

$$\Rightarrow \underset{\Delta f}{\Delta y} = -\frac{A_1}{A+\alpha} \cdot \Delta x_1 - \dots - \frac{A_n}{A+\alpha} \cdot \Delta x_n - \frac{\alpha_1}{A+\alpha} \Delta x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{A+\alpha} \Delta x_n$$

(поскольку $A \neq 0$, $\alpha \to 0$, то можем считать, что $|A+\alpha| \geq \frac{|A|}{2} > 0$).

Преобразуем коэф-ты: $\underset{\Delta x_n \to 0}{\overset{\Delta x_1 \to 0}{\longrightarrow}} 0$

$$\frac{A_k}{A+\alpha} = \frac{A_k}{A} \cdot \Big(1 + \underset{|\,| \leq \frac{1}{2}}{\frac{\alpha_k}{A}}\Big)^{-1} = \frac{A_k}{A}\Big(1 - \frac{\alpha_k}{A} - \Big(\frac{\alpha_k}{A}\Big)^2 - \dots\Big) = \frac{A_k}{A}(1 + \tilde{\alpha}_k) =$$

$$= \frac{A_k}{A} + \underbrace{\frac{A_k}{A} \cdot \tilde{\alpha}_k}_{= \beta_k \to 0} = \frac{A_k}{A} + \beta_k, \text{ где } \beta_k \to 0, \quad \begin{matrix} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{matrix}$$

Аналогично $\dfrac{\alpha_k}{A+\alpha} = \overbrace{\frac{\alpha_k}{A} + \gamma_k}^{= \tilde{\beta}_k \to 0}$, $\gamma_k \to 0$, $\begin{matrix} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \Delta f = -\frac{A_1}{A} \cdot \Delta x_1 - \dots - \frac{A_n}{A} \cdot \Delta x_n + \tilde{\tilde{\beta}}_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + \tilde{\tilde{\beta}}_n \Delta x_n,$$

где $\tilde{\tilde{\beta}}_k \to 0$, $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_n \to 0$.

Это и означает дифф-ть ф-ции f в точке $\overline{x}^1$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\overline{x}^1} = -\frac{A_k}{A} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big|_{\overline{x}^{1\prime}}}{\frac{\partial F}{\partial y}\big|_{\overline{x}^{1\prime}}}.$$

ч.т.д. $\blacksquare$